

# Matematika pro studenty ekonomie

2., upravené a doplněné vydání



- Lineární algebra
- Diferenciální a integrální počet
- Diferenciální rovnice
- Diferenční rovnice
- Teorie a 237 řešených příkladů





Jiří Moučka, Petr Rádľ

# **Matematika pro studenty ekonomie**

**2., upravené a doplněné vydání**



**Upozornění pro čtenáře a uživatele této knihy**

Všechna práva vyhrazena. Žádná část této tištěné či elektronické knihy nesmí být reprodukována a šířena v papírové, elektronické či jiné podobě bez předchozího písemného souhlasu nakladatele. Neoprávněné užití této knihy bude **trestně stíháno**.

**Doc. RNDr. Jiří Moučka, Ph.D.**

**RNDr. Petr Rádí**

## **Matematika pro studenty ekonomie**

2., upravené a doplněné vydání

Kniha je monografie

Vydala Grada Publishing, a.s.  
U Průhonu 22, 170 00 Praha 7  
tel.: +420 234 264 401, fax: +420 234 264 400  
[www.grada.cz](http://www.grada.cz)  
jako svou 5961. publikaci

Odborná recenze:

Prof. RNDr. Jan Chvalina, DrSc.  
Doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.

Vydání odborné knihy schválila Vědecká redakce  
nakladatelství Grada Publishing, a.s.

Odpovědní redaktoři Petr Somogyi, Kamila Nováková  
Sazba Petr Somogyi  
Návrh a zpracování obálky Jan Dvořák  
Počet stran 272  
Druhé vydání, Praha 2015  
Vytiskla Tiskárna v Ráji, s.r.o., Pardubice

© Grada Publishing, a.s., 2015  
Cover Photo © fotobanka allphoto

ISBN 978-80-247-9914-8 (pdf)  
ISBN 978-80-247-5406-2 (print)

# Obsah

<b>O autorech.....</b>	<b>9</b>
<b>Úvod.....</b>	<b>11</b>
<b>1. Lineární algebra.....</b>	<b>13</b>
1.1 Základní pojmy z teorie množin .....	14
Cvičení .....	16
1.2 Vektorové prostory .....	16
1.2.1 Pojem vektorového prostoru .....	16
1.2.2 Aritmetický vektorový prostor .....	18
1.2.3 Podprostor vektorového prostoru.....	19
1.2.4 Lineární závislost a nezávislost vektorů.....	21
1.2.5 Báze a dimenze vektorového prostoru .....	22
Cvičení .....	24
1.3 Matice.....	26
1.3.1 Pojem matice .....	26
1.3.2 Základní operace s maticemi .....	29
1.3.3 Hodnota matice .....	31
1.3.4 Násobení matic .....	35
Cvičení .....	38
1.4 Determinanty .....	39
1.4.1 Pojem determinantu .....	39
1.4.2 Vlastnosti determinantů.....	42
1.4.3 Kondenzační metoda výpočtu determinantů.....	47
Cvičení .....	48
1.5 Soustavy lineárních rovnic .....	50
1.5.1 Základní pojmy .....	50
1.5.2 Řešitelnost soustavy lineárních rovnic.....	52
1.5.3 Metody řešení soustav lineárních rovnic.....	54
Cvičení .....	63
1.6 Maticová algebra .....	65
1.6.1 Inverzní matice .....	65
1.6.2 Maticové rovnice .....	68
Cvičení .....	70
<b>2. Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.....</b>	<b>73</b>
2.1 Funkce. Vlastnosti funkcí .....	74
2.1.1 Definice funkce.....	74
2.1.2 Vlastnosti funkcí .....	77
2.1.3 Základní elementární funkce.....	82
2.1.4 Operace s funkcemi. Transformace grafu funkce.....	89
2.1.5 Polynom. Racionální funkce.....	92
Cvičení .....	97
2.2 Limita funkcí .....	99
2.2.1 Definice limity .....	99
2.2.2 Nevlastní limita .....	101

2.2.3 Výpočet limity .....	102
Cvičení.....	105
2.3 Spojitost funkcí .....	106
Cvičení.....	107
2.4 Derivace funkcí.....	108
2.4.1 Definice a geometrický význam derivace.....	108
2.4.2 Pravidla pro derivování .....	109
2.4.3 Derivace složených funkcí .....	112
2.4.4 Derivace implicitních funkcí. Derivace funkcí tvaru $fg$ .....	114
2.4.5 Derivace vyššího řádu.....	115
2.4.6 Diferenciál funkce.....	116
Cvičení.....	116
2.5 Užití derivací. Průběh funkce .....	118
2.5.1 L'Hospitalovo pravidlo .....	118
2.5.2 Monotónnost a extrémy funkce .....	121
2.5.3 Konvexnost, konkávnost. Inflexní body.....	127
2.5.4 Asymptoty grafu funkce.....	129
2.5.5 Průběh funkce .....	132
Cvičení.....	135
<b>3. Diferenciální počet funkcí dvou proměnných .....</b>	<b>139</b>
3.1 Pojem funkce dvou a více proměnných .....	140
3.1.1 Euklidovské prostory .....	140
3.1.2 Význačné body a množiny bodů v prostoru $E_n$ .....	143
3.1.3 Definice funkce dvou a více proměnných .....	145
3.1.4 Grafické znázornění funkce dvou proměnných.....	148
Cvičení.....	150
3.2 Limita a spojitost funkcí dvou proměnných .....	150
3.2.1 Limita funkcí dvou proměnných .....	150
3.2.2 Spojitost funkcí dvou proměnných .....	154
Cvičení.....	154
3.3 Derivace funkcí dvou proměnných.....	155
3.3.1 Parciální derivace.....	155
3.3.2 Geometrický význam parciální derivace .....	156
3.3.3 Tečná rovina a normála plochy .....	157
3.3.4 Parciální derivace vyšších řádů .....	158
Cvičení.....	160
3.4 Extrémy funkcí dvou a více proměnných .....	161
3.4.1 Lokální extrémy funkcí dvou proměnných .....	161
3.4.2 Lokální extrémy funkcí tří proměnných.....	165
3.4.3 Vázané extrémy .....	166
3.4.3 Absolutní extrémy.....	169
Cvičení.....	171
<b>4. Integrální počet funkcí jedné proměnné .....</b>	<b>173</b>
4.1 Neurčitý integrál .....	174
4.1.1 Primitivní funkce a neurčitý integrál .....	174
4.1.2 Přímá integrace pomocí vzorců a úprav integrandu .....	175

4.1.3	Integrace racionální funkce .....	180
4.1.4	Substituční metoda .....	184
4.1.5	Metoda „per partes“ .....	187
4.1.6	Integrace metodou neurčitých koeficientů .....	190
	Cvičení .....	191
4.2	Určitý integrál .....	193
4.2.1	Definice a vlastnosti určitého integrálu .....	193
4.2.2	Výpočet určitého integrálu .....	196
4.2.3	Geometrické aplikace určitého integrálu .....	198
	Cvičení .....	204
4.3	Nevlastní integrál .....	205
4.3.1	Integrál nevlastní vzhledem k mezi .....	205
4.3.2	Integrál nevlastní vzhledem k funkci .....	207
	Cvičení .....	210
<b>5.</b>	<b>Diferenciální rovnice .....</b>	<b>211</b>
5.1	Základní pojmy .....	212
	Cvičení .....	214
5.2	Diferenciální rovnice 1. řádu .....	215
5.2.1	Diferenciální rovnice typu $y' = f(x)$ .....	215
5.2.2	Diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými .....	216
5.2.3	Lineární diferenciální rovnice 1. řádu .....	218
	Cvičení .....	221
5.3	Lineární diferenciální rovnice 2. řádu .....	222
5.3.1	Diferenciální rovnice typu $y'' = f(x)$ .....	222
5.3.2	Zkrácená lineární diferenciální rovnice 2. řádu .....	223
5.3.3	Metoda variace konstant .....	226
5.3.4	Metoda neurčitých koeficientů .....	228
5.3.5	Skládání hlavních integrálů .....	232
	Cvičení .....	232
<b>6.</b>	<b>Diferenční rovnice .....</b>	<b>235</b>
6.1	Posloupnost. Diference posloupnosti .....	236
	Cvičení .....	240
6.2	Diferenční rovnice .....	240
6.2.1	Základní pojmy .....	240
6.2.2	Lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty .....	242
	Cvičení .....	249
	<b>Výsledky cvičení .....</b>	<b>251</b>
	<b>Literatura .....</b>	<b>269</b>
	<b>Shrnutí .....</b>	<b>270</b>
	<b>Rejstřík .....</b>	<b>271</b>





# O autorech

## **Doc. RNDr. Jiří Moučka, Ph.D.**

Vystudoval odbornou matematiku na Přírodovědecké fakultě Univerzity Jana Evangelisty Purkyně (dnes Masarykova univerzita) v Brně (1974). V rámci doktorského postgraduálního studia na Masarykově univerzitě v Brně studoval vlastnosti diskrétních algebraických struktur (1997). Touto problematikou se zabýval i ve své habilitační práci, která byla zaměřena na aplikaci diskrétních matematických struktur pro modelování procesů (2002).

Pedagogicky působil na Fakultě ekonomiky obrany státu VVŠ PV ve Vyškově, na Fakultě ekonomiky a managementu Univerzity obrany v Brně a na Provozně ekonomické fakultě Mendelovy univerzity v Brně. Přednášel především matematiku pro studenty ekonomických specializací, operační analýzu a ekonomicko-matematické metody. Zpracoval řadu studijních textů a skript zaměřených na základní kurz vyšší matematiky, teorii her a lineární programování. Je autorem a spoluautorem několika desítek odborných článků v oblasti teorie algebraických hyperstruktur a matematického modelování. V současné době je garantem předmětu Matematika na Fakultě vojenského leadershipu Univerzity obrany v Brně a na Provozně ekonomické fakultě Mendelovy univerzity v Brně.



## **RNDr. Petr Rádl**

Vystudoval Přírodovědeckou fakultu Univerzity Jana Evangelisty Purkyně (dnes Masarykova univerzita) v Brně, obor matematika a deskriptivní geometrie (1972). Zde v roce 1981 složil státní rigorózní zkoušku. Po absolvování základní vojenské služby je od roku 1973 zaměstnán na Mendelově univerzitě v Brně. Působil na Ústavu matematiky Lesnické a dřevařské fakulty, v letech 2004–2007 byl vedoucím tohoto ústavu.

Přednášel matematiku, konstruktivní geometrii a technické kreslení v různých studijních programech prezenční i kombinované formy studia na všech fakultách univerzity a je spoluautorem skript používaných ke studiu těchto předmětů.

Řadu let byl garantem přijímacích zkoušek z matematiky na Mendelovu univerzitu a je vedoucím autorského kolektivu Sbírkou příkladů z matematiky pro přijímací řízení. Externě přednášel technické kreslení na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně, kde byl také členem komise pro státní závěrečné zkoušky ve studijním programu Matematika a Aplikovaná matematika. Od roku 2008 působí na Ústavu statistiky a operačního výzkumu Provozně ekonomické fakulty Mendelovy univerzity v Brně a přednáší matematiku studentům této fakulty.





# Úvod

Znalost exaktních metod ekonomických teorií by měla v současné době patřit k nezbytné výbavě každého pracovníka na jakékoli úrovni ekonomické praxe. Z toho pro něj jednoznačně vyplývá nutnost seznámit se s jejich matematickými základy.

Stěžejním cílem autorů této učebnice, stejně jako cílem výuky matematiky na ekonomických fakultách, je poskytnout studentům základní znalosti vyšší matematiky využitelné při studiu navazujících ekonomicko-matematických předmětů a při studiu kvantitativních metod aplikovaných v odborných ekonomických disciplínách.

Učebnice je rozdělena do šesti kapitol, které na sebe logicky navazují. Pro úspěšné studium určité kapitoly je nezbytné zvládnutí látky z předchozích kapitol. Vždy se přitom požaduje znalost středoškolské matematiky v obvyklém rozsahu. V každé kapitole je formou definic a vět bez důkazů shrnuta potřebná teorie. Způsob výkladu je přitom přizpůsoben odbornému zaměření studentů, kteří nestudují matematiku jako takovou, ale potřebují ji umět vhodně využívat. Přímo v základním textu jsou probírané pojmy a metody ilustrovány množstvím řešených příkladů. Další úlohy, označené jako cvičení, jsou určeny k samostatnému řešení. Výsledky těchto cvičení jsou uvedeny na konci knihy. Definice, věty, příklady i obrázky jsou vždy označeny dvojicí čísel, z nichž první značí pořadové číslo kapitoly a druhá jejich pořadí uvnitř kapitoly. Značkou ■ jsou v textu kvůli větší přehlednosti označeny konce definic, vět a příkladů včetně jejich řešení.

Učebnice je určena především studentům prezenční i kombinované formy studia Provozně ekonomické fakulty Mendlovy univerzity v Brně a Fakulty vojenského leadershipu Univerzity obrany v Brně. Její obsah jednoznačně koresponduje se stávajícím studijním plánem prvních semestrů studia na zmíněných fakultách, kde oba autoři pedagogicky působí. Byla koncipována na základě skript a učebních textů, které jsou zaměřeny na dílčí části probírané problematiky a které byly používány při výuce základního kurzu matematiky na obou fakultách v posledním desetiletí. Zkušenosti z jejich používání, připomínky a názory jejich autorů i uživatelů byly při tvorbě této knihy využity a autoři za ně touto cestou srdečně děkují. Jedním z důležitých motivů vzniku předkládaného textu bylo shrnout celý obsah základního matematického kurzu do jediné učebnice, jejíž prostudování umožní studentům úspěšné zvládnutí předmětu Matematika.

Druhé vydání knihy reflektuje zkušenosti autorů a jejich spolupracovníků získané při jejím pětiletém intenzivním využívání.

Vzhledem k tomu, že mnohé další ekonomické fakulty v České republice mají ve svých studijních programech základní kurz vysokoškolské matematiky podobného obsahu i rozsahu, je možné, že po této učebnici sáhnou i studenti jiných vysokých škol, především ekonomického zaměření.

Všechny liché kapitoly napsal doc. RNDr. Jiří Moučka, Ph.D., autorem sudých kapitol je RNDr. Petr Rádl.

Za mnohé cenné rady a připomínky autoři děkují doc. RNDr. Josefu Kalasovi, CSc., RNDr. Ludmile Staré a RNDr. Milanu Vágnerovi.



# KAPITOLA 1

## Lineární algebra

Lineární algebra, jejíž základy se v této kapitole studují, se začala vytvářet jako samostatná matematická disciplína v 18. století, kdy byl zaveden pojem determinantu a ukázána metoda řešení soustavy  $n$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých. V polovině 19. století se poprvé objevuje pojem matice a další metody řešení soustav lineárních rovnic. Lineární algebra však není pouze teoretickou matematickou disciplínou. Typická je její aplikovatelnost a široké použití v praxi. Bezprostředně je využíváno metod lineární algebry v lineárním programování, jež řeší celou řadu úloh ekonomického charakteru.

## 1.1 Základní pojmy z teorie množin

V úvodním odstavci uvádíme přehled základních pojmů teorie množin v míře nezbytně nutné pro pochopení všech dalších úvah. **Množinou**  $M$  rozumíme souhrn určitých objektů chápány jako samostatný celek. Tyto objekty nazýváme **prvky množiny** a značíme  $a, b, x, y$ . Zápisem  $a \in M$ , resp.  $a \notin M$  rozumíme, že  $a$  je, resp.  $a$  není prvkem množiny  $M$ . Pro každý objekt  $a$  a množinu  $M$  platí právě jedna z možností  $a \in M$  nebo  $a \notin M$ . Množinu, která nemá žádný prvek, značíme symbolem  $\emptyset$  a říkáme jí **prázdná množina**. Množinu, která je souhrnem prvků  $b_1, \dots, b_n$  označujeme symbolem  $\{b_1, \dots, b_n\}$ .

Ze středoškolské matematiky jsou dále známy tyto zápisy a jejich význam:

- $A = B$  – **rovnost** množin  $A, B$ ,
- $A \subseteq B$  – množina  $A$  je **podmnožina** množiny  $B$ ,
- $A \cap B$  – **průnik** množin  $A, B$ ,
- $A \cup B$  – **sjednocení** množin  $A, B$ ,
- $A - B$  – **rozdíl** množin  $A, B$ , tedy množina právě těch prvků  $x \in A$ , pro které platí  $x \notin B$ .

Nechť  $M_1, M_2$  jsou dvě množiny. Množina všech uspořádaných dvojic  $(x_1, x_2)$ , kde  $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$ , se nazývá **kartézský součin** množin  $M_1, M_2$  a značí se  $M_1 \times M_2$ . Jsou-li  $M_1, M_2$  libovolné množiny, pak **binární relací** z množiny  $M_1$  do množiny  $M_2$  nazýváme každou podmnožinu kartézského součinu  $M_1 \times M_2$ .

**Zobrazením  $f$  z množiny  $M_1$  do množiny  $M_2$**  nazýváme každou binární relaci  $f \subseteq M_1 \times M_2$  takovou, že každému prvku  $x_1 \in M_1$  je přiřazen nejvýše jeden prvek  $x_2 \in M_2$  s vlastností  $(x_1, x_2) \in f$ . Někdy se používá značení  $f: M_1 \rightarrow M_2$ . Je-li při zobrazení  $f$  z množiny  $M_1$  do množiny  $M_2$  každému prvku  $x_1 \in M_1$  přiřazen právě jeden prvek  $x_2 \in M_2$ , mluvíme o **zobrazení  $f$  množiny  $M_1$  do množiny  $M_2$** . Jestliže při zobrazení  $f$  z množiny  $M_1$  do množiny  $M_2$  existuje ke každému prvku  $x_2 \in M_2$  alespoň jeden prvek  $x_1 \in M_1$  tak, že  $(x_1, x_2) \in f$ , mluvíme o **zobrazení  $f$  z množiny  $M_1$  na množinu  $M_2$** . Jestliže je při zobrazení  $f$  z množiny  $M_1$  do množiny  $M_2$  každému prvku  $x_1 \in M_1$  přiřazen právě jeden prvek  $x_2 \in M_2$  a ke každému prvku  $x_2 \in M_2$  existuje alespoň jeden prvek  $x_1 \in M_1$  tak, že  $(x_1, x_2) \in f$ , mluvíme o **zobrazení  $f$  množiny  $M_1$  na množinu  $M_2$** .

Důležitou roli v matematice i v jiných vědách hraje pojem (algebraické) operace. **Binární operací** v množině  $M$  rozumíme každé zobrazení  $M \times M \rightarrow M$ , které každé uspořádané dvojici  $(a, b) \in M$  přiřazuje nejvýše jeden prvek  $c \in M$ . Označíme-li binární operaci (dále jen operace) symbolem  $\square$ , můžeme psát  $a \square b = c$ .

Operaci  $\square$  nazýváme **komutativní** právě tehdy, když pro každé prvky  $a, b \in M$  platí

$$a \square b = b \square a.$$

Operaci  $\square$  nazýváme **asociativní** právě tehdy, když pro každé prvky  $a, b, c \in M$  platí

$$(a \square b) \square c = a \square (b \square c).$$

Operaci  $\bullet$  nazýváme **distributivní** zleva resp. zprava k operaci  $\square$  právě tehdy, když pro každé prvky  $a, b, c \in M$  platí

$$a \bullet (b \square c) = (a \bullet b) \square (a \bullet c)$$

resp.

$$(b \square c) \bullet a = (b \bullet a) \square (c \bullet a).$$

Je-li operace  $\bullet$  komutativní, nemusíme rozlišovat zleva a zprava a používáme pouze jeden vztah

$$a \bullet (b \square c) = (a \bullet b) \square (a \bullet c).$$

Výše uvedené rovnosti bývají také nazývány komutativní, asociativní a distributivní zákon.

Existuje-li v množině  $M$  takový prvek  $e$ , že pro každé  $x \in M$  platí rovnost  $x \square e = e \square x = x$ , nazývá se tento prvek **neutrální** vzhledem k operaci  $\square$ . Je-li  $e$  neutrální prvek vzhledem k operaci  $\square$  a existuje-li k prvku  $a \in M$  prvek  $\bar{a} \in M$  s vlastností  $a \square \bar{a} = \bar{a} \square a = e$ , nazýváme prvek  $\bar{a}$  **inverzní**, případně **opačný prvek** k prvku  $a$  na množině  $M$ .

Nejjednoduššími příklady komutativních a asociativních operací jsou běžné operace sčítání a násobení na množině  $\mathbf{N}_0$ . Při operaci sčítání hraje roli neutrálního prvku číslo 0, při operaci násobení číslo 1. Inverzní prvek k žádnému číslu však v množině přirozených čísel neexistuje ani vzhledem k operaci sčítání, ani vzhledem k násobení. V množině reálných čísel jsou obě operace komutativní i asociativní a vzhledem k oběma operacím má každý prvek  $a \in M$  inverzní prvek  $\bar{a}$ . Při sčítání je  $\bar{a} = -a$ , při násobení  $\bar{a} = \frac{1}{a}$ , neutrální prvky jsou opět 0 a 1.

Ve všech základních číselných množinách je operace násobení distributivní k operaci sčítání, tj.  $a \cdot (b + c) = ab + ac$ .

S celou řadou jiných operací na různých množinách se budeme setkávat na dalších stranách této učebnice.

Operace, v níž se vyskytují pouze prvky množiny  $M$ , tj.  $M \times M \rightarrow M$ , se nazývá vnitřní. Vyskytují-li se při operaci kromě prvků množiny  $M$  i prvky jiné množiny, např.  $\mathbf{R} \times M \rightarrow M$ , mluvíme o operaci vnější. Neprázdná množina, na níž je definována alespoň jedna (algebraická) operace, se nazývá **algebraická struktura**. Významnou algebraickou strukturou je vektorový prostor. Jeho studiem se budeme zabývat v následující kapitole.

Pro označování základních číselných množin je všude použito pevných symbolů takto:

$\mathbf{N}$  – množina všech přirozených čísel,

$\mathbf{N}_0$  – množina všech přirozených čísel včetně nuly,

- $\mathbf{Z}$  – množina všech celých čísel,  
 $\mathbf{R}$  – množina všech reálných čísel,  
 $\mathbf{R}^+$  – množina všech reálných kladných čísel,  
 $\mathbf{C}$  – množina všech komplexních čísel.

## Cvičení

- 1.1 Rozhodněte, která tvrzení jsou pravdivá.  
 a)  $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R}$ , b)  $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$ , c)  $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}$ , d)  $\mathbf{N} \cup \mathbf{Z} = \mathbf{R}$ , e)  $\mathbf{N} \cup \mathbf{Z} = \mathbf{Z}$ , f)  $\mathbf{N} \cap \mathbf{R} = \mathbf{R}$ ,  
 g)  $\mathbf{N} \cap \mathbf{R} = \mathbf{N}$ , h)  $\mathbf{N} - \mathbf{R} = \emptyset$ , i)  $\mathbf{N} - \mathbf{N} = \emptyset$ , j)  $\mathbf{N} - \mathbf{R} = \mathbf{R} - \mathbf{N}$ . k)  $1 \in \mathbf{N} \cap \mathbf{Z}$ ,  
 l)  $1 \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}$ .
- 1.2 Pro množiny  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{d, e, f\}$  sestrojte uvedené množiny.  
 a)  $A \cap B$ , b)  $B \cap A$ , c)  $A \cup B$ , d)  $B \cup A$ , e)  $A - B$ , f)  $B - A$ ,  
 g)  $A \times B$ , h)  $B \times A$ .
- 1.3 Rozhodněte, která tvrzení jsou pravdivá a vyjadřují distributivní zákon.  
 a)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ , b)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ,  
 c)  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ , d)  $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ ,  
 e)  $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$ .

## 1.2 Vektorové prostory

### 1.2.1 Pojem vektorového prostoru

Vektorový prostor je algebraická struktura  $(V, +, \cdot)$  se dvěma operacemi.  $V$  je množina libovolných prvků, které značíme  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , ... a říkáme jim vektory. Na  $V$  jsou zavedeny operace sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem. Operace sčítání je komutativní a asociativní, existuje v ní neutrální prvek, kterým je **nulový vektor**  $\mathbf{o}$  a ke každému vektoru  $\mathbf{a}$  existuje **opačný vektor**  $-\mathbf{a}$ . Operace násobení vektoru reálným číslem je asociativní a platí pro ni distributivní zákony vzhledem k operaci sčítání vektorů.

**Definice 1.1** Množina  $V$  libovolných prvků, které značíme  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , ...  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  a říkáme jim vektory, se nazývá **vektorový prostor**, jestliže:

- Je dáno zobrazení  $V \times V \rightarrow V$ , jež každé uspořádané dvojici vektorů  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in V \times V$  přiřazuje vektor  $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$  tak, že pro každé vektory  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$  platí axiomy:

$$(A1) \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a},$$

$$(A2) \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c},$$

$$(A3) \text{ existuje vektor } \mathbf{o} \in V \text{ takový, že pro každý vektor } \mathbf{a} \in V \text{ platí } \mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{a},$$

$$(A4) \text{ ke každému vektoru } \mathbf{a} \in V \text{ existuje vektor } \mathbf{a} \in V \text{ tak, že platí } \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}.$$



Toto zobrazení se nazývá **sčítání** na množině  $V$  a vektor  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  je **součet** vektorů  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ .

- Je dáno zobrazení  $\mathbf{R} \times V \rightarrow V$ , které každé uspořádané dvojici  $(r, \mathbf{a}) \in \mathbf{R} \times V$  přiřazuje vektor  $r\mathbf{a} \in V$  tak, že pro každá reálná čísla  $r, s \in \mathbf{R}$  a každé vektory  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$  platí axiomy:

$$(A5) 1\mathbf{a} = \mathbf{a},$$

$$(A6) r(s\mathbf{a}) = rs(\mathbf{a}),$$

$$(A7) (r+s)\mathbf{a} = r\mathbf{a} + s\mathbf{a},$$

$$(A8) r(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = r\mathbf{a} + r\mathbf{b}.$$

Toto zobrazení se nazývá **násobení** vektoru **reálným číslem** a vektor  $r\mathbf{a}$  se nazývá **reálný násobek** vektoru  $\mathbf{a}$ . ■

Místo pojmu vektorový prostor se lze v literatuře setkat také s názvem **lineární prostor**.

Definice vektorového prostoru je značně obecná. Této definici vyhovuje celá řada množin s vhodně definovanými operacemi. Vektorovými prostory jsou například:

- Množina všech reálných posloupností s obvyklým sčítáním a násobením čísel, tedy  $\{\mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n\} = \{\mathbf{a}_n\} + \{\mathbf{b}_n\}$ ,  $\{r\mathbf{a}_n\} = r\{\mathbf{a}_n\}$ .
- Množina všech funkcí definovaných na libovolné neprázdné množině spolu s obvyklým sčítáním funkcí a násobením funkce reálným číslem, tedy  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ ,  $(rf)(x) = r f(x)$ .
- Množina všech konvergentních posloupností.
- Množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic.
- Množina všech matic stejného typu.

Rovněž pojem vektoru jakožto prvku vektorového prostoru je v tomto pojetí velmi obecný. Vektorem může být uspořádaná  $n$ -tice reálných čísel, ale také reálná funkce, reálná posloupnost, matice, reálné číslo apod.

**Příklad 1.1** Uvažujme množinu všech přirozených čísel  $\mathbf{N}$ , na které definujeme součet přirozených čísel a reálný násobek přirozeného čísla obvyklým způsobem. Rozhodněme, zda množina  $\mathbf{N}$  spolu s operací reálného násobku je vektorový prostor.

**Řešení** Aby množina  $\mathbf{N}$  byla vektorovým prostorem, musí podle definice vektorového prostoru platit:

- Pro všechny vektory  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  z množiny  $\mathbf{N}$  je jejich součet  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  opět vektor z  $\mathbf{N}$ , tedy množina  $\mathbf{N}$  je uzavřená vzhledem ke sčítání.
- Pro každé  $r \in \mathbf{R}$  je  $r\mathbf{a} \in \mathbf{N}$ , tedy množina  $\mathbf{N}$ , je uzavřená vzhledem k násobení reálným číslem.
- V množině  $\mathbf{N}$  platí axiomy (A1) až (A8).

Zatímco podmínka a) je zřejmě splněna, podmínka b) splněna není, neboť např. pro  $r = -1$ ,  $\mathbf{a} = 2$  neplatí  $r\mathbf{a} \in \mathbf{N}$  a tedy množina  $\mathbf{N}$  není uzavřená vůči násobení reálným číslem. Množina přirozených čísel  $\mathbf{N}$  s obvykle definovanými operacemi tedy není vektorový prostor. ■

## 1.2.2 Aritmetický vektorový prostor

**Definice 1.2** Uspořádanou  $n$ -tici reálných čísel  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , nazýváme  **$n$ -rozměrným aritmetickým vektorem**. Reálná čísla  $a_1, a_2, \dots, a_n$  nazýváme **souřadnicemi aritmetického vektoru  $\mathbf{a}$** . ■

**Definice 1.3** **Součtem aritmetických vektorů**  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  a  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  nazýváme aritmetický vektor  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$ . ■

**Příklad 1.2** Pro aritmetické vektory  $\mathbf{a} = (-1, 6, 14)$  a  $\mathbf{b} = (1, -17, -13)$  je jejich součtem aritmetický vektor  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (0, -11, 1)$ . ■

**Definice 1.4** Necht'  $r \in \mathbf{R}$ . **Reálným  $r$ -násobkem aritmetického vektoru**  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  je aritmetický vektor  $r\mathbf{a} = (ra_1, \dots, ra_n)$ . ■

**Příklad 1.3** Pro aritmetické vektory  $\mathbf{a} = (-1, 6)$ ,  $\mathbf{b} = (2, -4)$  platí  $5\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = (1, 18)$ . ■

**Definice 1.5** **Opačným aritmetickým vektorem** k aritmetickému vektoru  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  nazýváme aritmetický vektor  $-\mathbf{a} = (-a_1, \dots, -a_n)$ . **Rozdílem aritmetických vektorů**  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  rozumíme součet aritmetického vektoru  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  a aritmetického vektoru opačného k aritmetickému vektoru  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ , tedy  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = (a_1, \dots, a_n) + (-b_1, \dots, -b_n) = (a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n)$ . ■

**Definice 1.6** Aritmetický vektor  $\mathbf{o}$ , jehož všechny souřadnice jsou rovny nule, tedy  $\mathbf{o} = (0, \dots, 0)$ , nazýváme **nulovým aritmetickým vektorem**. ■

**Definice 1.7** Řekneme, že aritmetický vektor  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  je **roven** aritmetickému vektoru  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  a píšeme  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ , jestliže platí  $a_j = b_j$  pro každé  $j \in \{1, \dots, n\}$ . ■

Označme nyní symbolem  $V_n$  množinu všech  $n$ -rozměrných aritmetických vektorů.

**Věta 1.1** Jestliže na množině  $V_n$  definujeme součet aritmetických vektorů z  $V_n$  a reálný násobek aritmetického vektoru z  $V_n$  vztahy

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n), \quad r\mathbf{a} = (ra_1, \dots, ra_n),$$

pak  $V_n$  je vektorový prostor. ■

**Definice 1.8** Množina  $V_n$  všech aritmetických vektorů, na které jsou definovány operace sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem vztahy

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \quad \text{a} \quad r\mathbf{a} = (ra_1, \dots, ra_n),$$

se nazývá  **$n$ -rozměrný aritmetický vektorový prostor**. ■

Z definice aritmetického vektorového prostoru a předcházející věty je zřejmé, že každý aritmetický vektorový prostor je vektorovým prostorem ve smyslu definice 1.1 a stejně tak každý aritmetický vektor je vektorem.

Kromě operace násobení vektoru reálným číslem, zavádíme v aritmetickém vektorovém prostoru ještě jiné násobení, a to tzv. skalární součin vektorů.

**Definice 1.9** **Skalárním součinem** aritmetických vektorů  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  a  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  rozumíme číslo  $\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$ . ■

**Příklad 1.4** Skalárním součinem aritmetických vektorů  $\mathbf{a} = (6, -3, 0, -9)$  a  $\mathbf{b} = (2, -1, 5, -3)$  je číslo  $\mathbf{ab} = 6 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) + 0 \cdot 5 + (-9) \cdot 3 = -12$ . ■

### 1.2.3 Podprostor vektorového prostoru

**Definice 1.10** Necht'  $V$  je vektorový prostor,  $W$  neprázdná podmnožina množiny  $V$ . Řekneme, že množina  $W$  je **podprostor vektorového prostoru**  $V$  a píšeme  $W \subset V$ , jestliže platí:

- (1) Pro každou dvojici vektorů  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W$  je  $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in W$ .  
 (2) Pro každé reálné číslo  $r \in \mathbf{R}$  a každý vektor  $\mathbf{a} \in W$  je  $r\mathbf{a} \in W$ . ■

Podprostor  $W$  vektorového prostoru  $V$  je vždy vektorovým prostorem. Vyplyvá to z toho, že v podprostoru  $W$  platí axiomy (A1)–(A8) a podle podmínek (1) a (2) z definice podprostoru je množina  $W$  uzavřená vzhledem k operacím sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem.

Necht'  $\mathbf{o}$  je nulový vektor vektorového prostoru  $V$ . Jednoprvková množina obsahující pouze nulový vektor, tedy množina  $\{\mathbf{o}\}$  je podprostor vektorového prostoru  $V$ . Množina  $\{\mathbf{o}\}$  se nazývá **triviální vektorový prostor**. Triviální vektorový prostor je jediný vektorový prostor, který má konečný počet prvků (obsahuje-li vektorový prostor alespoň jeden nenulový vektor, pak obsahuje současně všechny reálné násobky tohoto vektoru a těch je nekonečný počet).

Ve smyslu shora uvedené definice je podprostorem libovolného vektorového prostoru  $V$  také celý vektorový prostor  $V$ .

**Definice 1.11** Necht'  $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  jsou prvky vektorového prostoru  $V$ . Řekneme, že vektor  $\mathbf{a}$  je **lineární kombinací** vektorů  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ , jestliže existují reálná čísla  $c_1, \dots, c_k$  taková, že platí  $\mathbf{a} = c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_k\mathbf{a}_k$ . Čísla  $c_1, \dots, c_k$  se nazývají **koeficienty lineární kombinace**. ■

**Příklad 1.5** Nulový vektor  $\mathbf{o}$  je lineární kombinací libovolné skupiny vektorů  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  z vektorového prostoru  $V$ , protože platí  $\mathbf{o} = 0\mathbf{a}_1 + \dots + 0\mathbf{a}_k$ . Lineární kombinace vektorů, ve které jsou všechny koeficienty rovny nule, se nazývá **triviální lineární kombinace**. ■

**Příklad 1.6** Zjistíme, zda vektor  $\mathbf{a} = (2, 1, 6)$  je lineární kombinací vektorů  $\mathbf{a}_1 = (4, 0, -1)$  a  $\mathbf{a}_2 = (2, 0, 5)$ .

**Řešení** Podle definice lineární kombinace je třeba najít reálná čísla  $c_1, c_2$  tak, aby platilo

$$\mathbf{a} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2.$$

Po dosazení souřadnic vektorů  $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  do této rovnice obdržíme

$$(2, 1, 6) = (4c_1 + 2c_2, 0c_1 + 0c_2, -1c_1 + 5c_2).$$

Podle definice rovnosti aritmetických vektorů to znamená, že platí

$$2 = 4c_1 + 2c_2,$$

$$1 = 0c_1 + 0c_2,$$

$$6 = -1c_1 + 5c_2.$$