

# Základy náhodných procesů II

Zuzana Prášková

UNIVERZITA KARLOVA  
NAKLADATELSTVÍ KAROLINUM

## Základy náhodných procesů II

Zuzana Prášková

---

Recenzovali:

doc. RNDr. Tomáš Čipra, DrSc.

Mgr. David Kraus

Vydala Univerzita Karlova, Nakladatelství Karolinum

jako učební text pro MFF UK

Sazba Zuzana Prášková s použitím typografického systému LaTeX  
2., upravené vydání

© Zuzana Prášková, 2016

© Univerzita Karlova, 2016

Text neprošel jazykovou ani redakční úpravou nakladatelství.

ISBN 978-80-246-3516-3

ISBN 978-80-246-3529-3 (online : pdf)



Univerzita Karlova

Nakladatelství Karolinum 2016

[www.karolinum.cz](http://www.karolinum.cz)

[ebooks@karolinum.cz](mailto:ebooks@karolinum.cz)

# Obsah

Předmluva . . . . .	7
Seznam použitých symbolů . . . . .	8
<b>1 Základní pojmy</b>	<b>9</b>
1.1 Definice a základní charakteristiky náhodného procesu . . . . .	9
1.1.1 Striktní a slabá stacionarita . . . . .	11
1.1.2 Vlastnosti autokovarianční funkce . . . . .	12
1.2 Některé důležité třídy náhodných procesů . . . . .	15
1.2.1 Markovovy procesy . . . . .	15
1.2.2 Procesy s nezávislými přírůstky . . . . .	16
1.2.3 Martingaly . . . . .	17
1.3 Cvičení a doplňky . . . . .	17
<b>2 Procesy s konečnými druhými momenty</b>	<b>21</b>
2.1 Hilbertův prostor . . . . .	21
2.2 Prostor $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . . . . .	22
2.3 Procesy se spojitým časem v $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . . . . .	25
2.3.1 Spojitost procesu . . . . .	25
2.3.2 Derivace procesu . . . . .	26
2.3.3 Riemannův integrál . . . . .	28
2.4 Cvičení a doplňky . . . . .	29
<b>3 Spektrální rozklad autokovarianční funkce</b>	<b>31</b>
3.1 Pomocná tvrzení . . . . .	31
3.2 Spektrální rozklad autokovarianční funkce . . . . .	32
3.3 Existence a výpočet spektrální hustoty . . . . .	35
3.4 Cvičení a doplňky . . . . .	39
<b>4 Spektrální rozklad náhodného procesu</b>	<b>41</b>
4.1 Procesy s ortogonálními přírůstky . . . . .	41
4.2 Integrál podle procesu s ortogonálními přírůstky . . . . .	42
4.3 Spektrální rozklad stacionárních procesů . . . . .	47

4.4	Cvičení a doplňky . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Lineární modely časových řad</b>	<b>55</b>
5.1	Posloupnosti klouzavých součtů . . . . .	55
5.2	Lineární proces . . . . .	58
5.3	Autoregresní posloupnosti . . . . .	62
5.4	Posloupnosti ARMA . . . . .	71
5.5	Lineární filtry . . . . .	76
5.6	Cvičení a doplňky . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Vybrané limitní věty</b>	<b>81</b>
6.1	Zákony velkých čísel . . . . .	81
6.2	Centrální limitní věty . . . . .	86
6.3	Cvičení a doplňky . . . . .	95
<b>7</b>	<b>Predikce</b>	<b>97</b>
7.1	Predikce v časové doméně . . . . .	97
7.1.1	Projekce v Hilbertově prostoru . . . . .	97
7.1.2	Predikce založená na konečné minulosti . . . . .	99
7.1.3	Rekurzivní postupy pro predikci . . . . .	103
7.1.4	Predikce založená na nekonečné minulosti . . . . .	111
7.2	Predikce ve spektrální doméně . . . . .	114
7.3	Cvičení a doplňky . . . . .	119
<b>8</b>	<b>Filtrace signálu a šumu</b>	<b>123</b>
8.1	Filtrace v konečné stacionární posloupnosti . . . . .	123
8.2	Filtrace v nekonečné stacionární posloupnosti . . . . .	124
8.3	Cvičení a doplňky . . . . .	129
<b>9</b>	<b>Odhady průměru a autokorelační funkce</b>	<b>131</b>
9.1	Odhad průměru . . . . .	131
9.2	Odhady autokovarianční a autokorelační funkce . . . . .	132
9.3	Parciální autokorelační funkce . . . . .	135
9.4	Cvičení a doplňky . . . . .	142
<b>10</b>	<b>Odhady parametrů v modelech ARMA</b>	<b>145</b>
10.1	Odhady parametrů v modelech AR . . . . .	145
10.2	Odhady parametrů v modelech MA a ARMA . . . . .	149
10.3	Maximálně věrohodné odhady . . . . .	152
10.4	Cvičení a doplňky . . . . .	155

<b>11 Periodogram a odhady spektrální hustoty</b>	<b>157</b>
11.1 Periodogram . . . . .	157
11.2 Odhady spektrální hustoty . . . . .	163
<b>Literatura</b>	<b>167</b>



# Předmluva

Toto je druhé vydání učebního textu k předmětu Náhodné procesy 2 pro posluchače MFF UK, kteří studují magisterský studijní program Matematika ve studijních oborech Finanční a pojistná matematika a Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie. Navazuje na učební texty Prášková, Z., Lachout, P.: Základy náhodných procesů (Karolinum, Praha 1998, 2001, 2005) a Prášková, Z., Lachout, P.: Základy náhodných procesů I (Matfyzpress, Praha 2012) k přednášce Náhodné procesy 1.

Výklad látky začíná opakováním základních vlastností náhodných procesů z předchozího kursu, které doplňuje o nové souvislosti, dále však již pokračuje nezávisle a soustředí se na teorii stacionárních procesů s diskrétním i spojitým časem. Předpokládá pokročilejší znalosti z teorie pravděpodobnosti (např. z přednášky Pravděpodobnost 1) a také základní znalosti funkcionální a komplexní analýzy a matematické statistiky (např. Úvod do funkcionální analýzy, Úvod do komplexní analýzy, Matematická statistika 1).

Do tohoto vydání byly zahrnuty některé zkušenosti z výuky, text byl částečně modifikován a rozšířen. Kapitola 11 je zcela nová. Text byl rovněž doplněn o další literaturu.

autorka

## Seznam použitých symbolů

$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{N}_0$	množina nezáporných celých čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$\mathbf{x}$	sloupcový vektor
$\mathbf{A}$	obecná matice
$\mathbf{I}$	jednotková matice
$\ \cdot\ $	norma prvku
$\mathcal{B}$	borelovská $\sigma$ -algebra
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	normální rozdělení s parametry $\mu, \sigma^2$
$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	náhodná veličina s rozdělením $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
$\{X_t, t \in T\}$	proces náhodných veličin
$\mathcal{M}\{X_t, t \in T\}$	lineární obal procesu $\{X_t, t \in T\}$
$\mathcal{H}\{X_t, t \in T\}$	Hilbertův prostor vytvořený náhodným procesem $\{X_t, t \in T\}$
$X \perp Y$	ortogonální náhodné veličiny
$\overline{\lim}$	limes superior
$\xrightarrow{\text{P}}$	konvergence v pravděpodobnosti
$\xrightarrow{\text{D}}$	konvergence v distribuci
l. i. m.	konvergence podle kvadratického středu



# Kapitola 1

## Základní pojmy

### 1.1 Definice a základní charakteristiky náhodného procesu

**Definice 1.1.** Necht'  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  je pravděpodobnostní prostor, necht'  $T \subset \mathbb{R}$  a  $(S, \mathcal{E})$  je obecný měřitelný prostor. Rodina náhodných veličin  $\{X_t, t \in T\}$  definovaných na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  s hodnotami v  $S$  se nazývá *náhodný proces*.

V případě, že  $T = \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  nebo  $T \subset \mathbb{Z}$ , mluvíme o *procesu s diskrétním časem* nebo o *časové řadě*. Pokud  $T = [a, b]$ , kde  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ , říkáme, že  $\{X_t, t \in T\}$  je *proces se spojitým časem*. Pokud  $S = \mathbb{R}$ , říkáme, že  $\{X_t, t \in T\}$  je *reálný náhodný proces*.

**Definice 1.2.** Dvojice  $(S, \mathcal{E})$ , kde  $S$  je množina hodnot náhodných veličin  $X_t$  a  $\mathcal{E}$  je  $\sigma$ -algebra podmnožin  $S$ , se nazývá *stavový prostor* procesu  $\{X_t, t \in T\}$ . Pokud náhodné veličiny  $X_t$  nabývají pouze diskrétních hodnot, říkáme, že jde o *proces s diskrétními stavy*, nabývají-li hodnot z nějakého intervalu, mluvíme o *procesu se spojitými stavy*.

Náhodný proces  $\{X_t, t \in T\}$  můžeme chápat jako funkci dvou proměnných  $\omega, t$ . Pro pevné  $t \in T$  je  $X_t = X_t(\cdot)$  náhodná veličina definovaná na  $\Omega$ ; pro pevné  $\omega \in \Omega$  je  $X_{(\cdot)} = X_{(\cdot)}(\omega)$  funkcí proměnné  $t$ . Této funkci říkáme *trajektorie procesu*  $\{X_t, t \in T\}$ .

**Definice 1.3.** Reálný stochastický proces  $\{X_t, t \in T\}$  se nazývá *měřitelný*, jestliže zobrazení  $(\omega, t) \rightarrow X_t(\omega)$  je  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_T$ -měřitelné, kde  $\mathcal{B}_T$  je  $\sigma$ -algebra borelovských podmnožin  $T$  a  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_T$  značí součinovou  $\sigma$ -algebru.

Každé konečné podmnožině  $\{t_1, \dots, t_n\} \subset T$  lze přiřadit systém náhodných veličin  $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$ , které mají sdružené rozdělení s distribuční funkcí

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n).$$

Pro  $n \in \mathbb{N}$  a  $t_1, \dots, t_n \in T$  má systém distribučních funkcí  $\{F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)\}$  následující vlastnosti: Pro libovolnou permutaci  $i_1, \dots, i_n$  čísel  $1, \dots, n$  platí

$$F_{t_{i_1}, \dots, t_{i_n}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) \quad (1.1)$$

a

$$\lim_{x_{n+1} \rightarrow \infty} F_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n). \quad (1.2)$$

Systém distribučních funkcí s uvedenými vlastnostmi se nazývá *konzistentní*. Ke každému náhodnému procesu existuje konzistentní systém distribučních funkcí. Naopak platí

**Věta 1.1** (Daniellova-Kolmogorovova). *Nechť  $\{F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)\}$  je konzistentní systém distribučních funkcí. Potom existuje náhodný proces  $\{X_t, t \in T\}$  takový, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$ , libovolná  $t_1, \dots, t_n \in T$  a libovolná reálná  $x_1, \dots, x_n$  platí*

$$P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n).$$

*Důkaz.* Štěpán (1987), věta I.10.3. □

**Definice 1.4.** *Komplexní náhodná veličina  $X$  se definuje jako  $X = Y + iZ$ , kde  $Y$  a  $Z$  jsou reálné náhodné veličiny. Pokud existují střední hodnoty  $EY$  a  $EZ$ , definujeme střední hodnotu komplexní náhodné veličiny  $X$  jako  $EX = EY + iEZ$ . Existují-li druhé momenty náhodných veličin  $Y$  a  $Z$ , definujeme rozptyl náhodné veličiny  $X$  jako*

$$\text{var } X = E(X - EX)(\overline{X} - \overline{EX}) = E|X - EX|^2,$$

což je vždy nezáporné číslo.

*Komplexní náhodný proces* je definován jako rodina komplexních náhodných veličin na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

**Definice 1.5.** *Nechť  $\{X_t, t \in T\}$  je náhodný proces takový, že pro každé  $t \in T$  existuje střední hodnota  $EX_t$ . Potom funkce  $\mu_t = EX_t$  definovaná na  $T$  se nazývá *střední hodnota procesu*  $\{X_t, t \in T\}$ . Proces, jehož střední hodnota je identicky rovna nule, se nazývá *centrovaný*.*

Jestliže  $\{X_t, t \in T\}$  je proces s konečnými druhými momenty, tj.  $E|X_t|^2 < \infty$  pro všechna  $t \in T$ , potom (obecně komplexní) funkce dvou proměnných definovaná na  $T \times T$  předpisem  $R(s, t) = E(X_s - \mu_s)(\overline{X_t} - \overline{\mu_t})$  se nazývá *autokovarianční funkce procesu*  $\{X_t, t \in T\}$ . Hodnota  $R(t, t)$  se nazývá *rozptyl procesu* v čase  $t$ .

*Autokorelační funkce* procesu  $\{X_t, t \in T\}$  s kladnými rozptyly je definována jako

$$r(s, t) = \frac{R(s, t)}{\sqrt{R(s, s)}\sqrt{R(t, t)}}, \quad s, t \in T.$$

**Definice 1.6.** Náhodný proces  $\{X_t, t \in T\}$  se nazývá *gaussovský (normální)*, jsou-li všechna jeho konečněrozměrná rozdělení normální, tj. jestliže pro každé  $n \in \mathbb{N}$  a  $t_1, \dots, t_n \in T$  má vektor  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})'$   $n$ -rozměrné normální rozdělení  $\mathcal{N}_n(\mathbf{m}_t, \mathbf{V}_t)$ , kde  $\mathbf{m}_t = (EX_{t_1}, \dots, EX_{t_n})'$  a

$$\mathbf{V}_t = \begin{pmatrix} \text{var}X_{t_1} & \text{cov}(X_{t_1}, X_{t_2}) & \dots & \text{cov}(X_{t_1}, X_{t_n}) \\ \text{cov}(X_{t_2}, X_{t_1}) & \text{var}X_{t_2} & \dots & \text{cov}(X_{t_2}, X_{t_n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cov}(X_{t_n}, X_{t_1}) & \text{cov}(X_{t_n}, X_{t_2}) & \dots & \text{var}X_{t_n} \end{pmatrix}.$$

### 1.1.1 Striktní a slabá stacionarita

**Definice 1.7.** Řekneme, že náhodný proces  $\{X_t, t \in T\}$  je *striktně stacionární*, jestliže pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$ , pro libovolná reálná  $x_1, \dots, x_n$  a pro libovolná  $t_1, \dots, t_n$  a  $h$  taková, že  $t_k \in T, t_k + h \in T, 1 \leq k \leq n$ , platí

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1+h, \dots, t_n+h}(x_1, \dots, x_n).$$

Je-li proces  $\{X_t, t \in T\}$  striktně stacionární, pak všechny náhodné veličiny  $X_t$  mají stejné rozdělení a základní charakteristiky (střední hodnota, rozptyl, kovariance, ...) se nemění při posunutí v čase. Zavedeme ještě méně přísnou definici stacionarity.

**Definice 1.8.** Náhodný proces  $\{X_t, t \in T\}$  s konečnými druhými momenty se nazývá *slabě stacionární*, má-li konstantní střední hodnotu  $\mu_t = \mu$  pro všechna  $t \in T$  a je-li jeho autokovarianční funkce  $R(s, t)$  funkcí pouze  $s - t$ . Je-li splněna pouze podmínka na autokovarianční funkci, mluvíme o *kovarianční stacionaritě*.

**Poznámka 1.1.** Autokovarianční funkci slabě stacionárních procesů lze definovat jako funkci jedné proměnné vztahem  $R(t) := R(t, 0), t \in T$ ; autokorelační funkce je potom dána předpisem  $r(t) = R(t)/R(0)$ .

**Věta 1.2.** *Striktně stacionární náhodný proces  $\{X_t, t \in T\}$  s konečnými druhými momenty je i slabě stacionární.*

*Důkaz.* Je zřejmé, neboť ze striktní stacionarity plyne, že náhodné veličiny  $X_t$  mají pro všechna  $t \in T$  stejné rozdělení a tedy stejnou konečnou střední hodnotu a podobně náhodné veličiny  $X_t$  a  $X_{t+h}$  mají pro všechna  $t \in T$  a každé  $h$  takové, že  $t \in T, t+h \in T$ , stejné sdružené rozdělení a tedy stejné kovariance.  $\square$

Opačné tvrzení obecně neplatí; např. posloupnost  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  definovaná předpisem  $X_t = (-1)^t X$ , kde  $X$  je náhodná veličina nabývající hodnoty  $-\frac{1}{4}$  s pravděpodobností  $\frac{3}{4}$  a hodnoty  $\frac{3}{4}$  s pravděpodobností  $\frac{1}{4}$ , je slabě stacionární, neboť  $EX_t = 0, \text{var} X_t = \sigma^2 = \frac{3}{16}, R(s, t) = \sigma^2(-1)^{s+t} = \sigma^2(-1)^{s-t}$ , ale není striktně stacionární. Platí však

**Věta 1.3.** *Slabě stacionární gaussovský proces  $\{X_t, t \in T\}$  je i striktně stacionární.*

*Důkaz.* Ze slabé stacionarity procesu  $\{X_t, t \in T\}$  plyne, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  a libovolné  $t_1, \dots, t_n, h$  mají náhodné vektory  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  a  $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$  stejnou střední hodnotu a stejnou (konečnou) varianční matici. Protože normální rozdělení je těmito charakteristikami určeno jednoznačně, musí mít tyto vektory stejné rozdělení.  $\square$

## 1.1.2 Vlastnosti autokovarianční funkce

Uveďme nyní základní vlastnosti autokovarianční funkce.

**Věta 1.4.** *Nechť  $\{X_t, t \in T\}$  je proces s konečnými druhými momenty. Potom pro jeho autokovarianční funkci platí*

$$\begin{aligned} R(t,t) &\geq 0, \\ |R(s,t)| &\leq \sqrt{R(s,s)}\sqrt{R(t,t)}. \end{aligned}$$

*Důkaz.* První vlastnost je vlastnost rozptylu. Druhá vlastnost plyne ze Schwarzovy nerovnosti, neboť

$$\begin{aligned} |R(s,t)| &= |\mathbb{E}(X_s - \mathbb{E}X_s)(\overline{X_t - \mathbb{E}X_t})| \leq \mathbb{E}|(X_s - \mathbb{E}X_s)(\overline{X_t - \mathbb{E}X_t})| \\ &\leq (\mathbb{E}|X_s - \mathbb{E}X_s|^2)^{\frac{1}{2}}(\mathbb{E}|X_t - \mathbb{E}X_t|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{R(s,s)}\sqrt{R(t,t)}. \end{aligned}$$

$\square$

**Poznámka 1.2.** Pro slabě stacionární proces je tedy  $R(0) \geq 0$  a  $|R(t)| \leq R(0)$ .

**Definice 1.9.** Nechť  $f(s,t)$  je obecně komplexní funkce definovaná na  $T \times T$ ,  $T \subset \mathbb{R}$ . Řekneme, že  $f$  je *pozitivně semidefinitní*, jestliže pro každé  $n \in \mathbb{N}$ , libovolná komplexní čísla  $c_1, \dots, c_n$  a libovolné body  $t_1, \dots, t_n \in T$  platí

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \overline{c_k} f(t_j, t_k) \geq 0. \quad (1.3)$$

Říkáme, že komplexní funkce  $g$  jedné proměnné na  $T$  je *pozitivně semidefinitní*, jestliže pro každé  $n \in \mathbb{N}$ , libovolná komplexní čísla  $c_1, \dots, c_n$  a libovolné body  $t_1, \dots, t_n \in T$ , takové že  $t_j - t_k \in T$ , platí

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \overline{c_k} g(t_j - t_k) \geq 0. \quad (1.4)$$

**Definice 1.10.** Řekneme, že komplexní funkce  $f$  na  $T \times T$  je *hermitovskými symetrická*, jestliže  $f(s,t) = \overline{f(t,s)}$  pro všechna  $s, t \in T$ .

Komplexní funkce  $g$  jedné proměnné se nazývá *hermitovskými symetrická*, když pro všechna  $t \in T$  je  $g(-t) = \overline{g(t)}$ .

**Věta 1.5.** *Pozitivně semidefinitní funkce je i hermitovsky symetrická.*

*Důkaz.* V definici 1.9 pro  $n = 1$  stačí zvolit  $c_1 = 1$ ; pro  $n = 2$  stačí zvolit  $c_1 = 1, c_2 = 1$  a dále  $c_1 = 1, c_2 = i (= \sqrt{-1})$ .  $\square$

**Poznámka 1.3.** Reálná funkce  $f$  dvou proměnných na  $T \times T$ , která je pozitivně semidefinitní, je symetrická, tj.  $f(s, t) = f(t, s)$  pro všechny body  $s, t \in T$ . Pro reálnou funkci  $g$  jedné proměnné na  $T$  z pozitivní semidefinitnosti plyne  $g(t) = g(-t)$  pro každé  $t \in T$ .

**Věta 1.6.** *Nechť  $\{X_t, t \in T\}$  je proces s konečnými druhými momenty. Potom jeho autokovarianční funkce je pozitivně semidefinitní na  $T \times T$ .*

*Důkaz.* Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že proces je centrováný. Potom pro každé přirozené číslo  $n$ , komplexní konstanty  $c_1, \dots, c_n$  a body  $t_1, \dots, t_n \in T$  platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E} \left| \sum_{j=1}^n c_j X_{t_j} \right|^2 = \mathbb{E} \left( \sum_{j=1}^n c_j X_{t_j} \overline{\sum_{k=1}^n c_k X_{t_k}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \overline{c_k} \mathbb{E}(X_{t_j} \overline{X_{t_k}}) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \overline{c_k} R(t_j, t_k). \end{aligned}$$

$\square$

**Věta 1.7.** *Ke každé pozitivně semidefinitní funkci  $R$  na  $T \times T$  existuje náhodný proces  $\{X_t, t \in T\}$  s konečnými druhými momenty takový, že  $R$  je jeho autokovarianční funkcí.*

*Důkaz.* Větu dokážeme pouze pro reálnou funkci  $R$ . Důkaz pro obecnou pozitivně semidefinitní funkci lze nalézt např. v Loève (1955), kap. X, odst. 34.

Z pozitivní semidefinitnosti funkce  $R$  plyne, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  a libovolná reálná čísla  $t_1, \dots, t_n \in T$  je matice

$$\mathbf{V}_t = \begin{pmatrix} R(t_1, t_1) & R(t_1, t_2) & \dots & R(t_1, t_n) \\ R(t_2, t_1) & R(t_2, t_2) & \dots & R(t_2, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R(t_n, t_1) & R(t_n, t_2) & \dots & R(t_n, t_n) \end{pmatrix}$$

pozitivně semidefinitní. Funkce  $\varphi(\mathbf{u}) = \exp\{-\frac{1}{2}\mathbf{u}'\mathbf{V}_t\mathbf{u}\}$  pro  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  je charakteristickou funkcí normálního rozdělení  $\mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \mathbf{V}_t)$ . Pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  a libovolná reálná čísla  $t_1, \dots, t_n \in T$  takto vytvoříme systém charakteristických funkcí, jemuž odpovídá systém normálních distribučních funkcí, který je konzistentní. Tudíž podle Daniellovy-Kolmogorovy věty existuje gaussovský náhodný proces, jehož všechny vzájemné kovariance jsou určeny hodnotami funkce  $R(s, t)$ ; funkce  $R$  je tedy jeho autokovarianční funkce.  $\square$

**Příklad 1.1.** Zjistěte, zda funkce  $\cos t$ ,  $t \in T = (-\infty, \infty)$ , je autokovarianční funkce nějakého náhodného procesu.

Řešení: Stačí ověřit, že funkce  $\cos t$  je pozitivně semidefinitní. Nechť je  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$  a  $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ . Potom platí

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \bar{c}_k \cos(t_j - t_k) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \bar{c}_k (\cos t_j \cos t_k + \sin t_j \sin t_k) \\ &= \left| \sum_{j=1}^n c_j \cos t_j \right|^2 + \left| \sum_{k=1}^n c_k \sin t_k \right|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Funkce  $\cos t$  je tedy pozitivně semidefinitní, a proto podle věty 1.7 existuje (gaussovský) náhodný proces  $\{X_t, t \in T\}$ , jehož autokovarianční funkce je  $R(s, t) = \cos(s - t)$ .

**Věta 1.8.** *Součet dvou pozitivně semidefinitních funkcí je pozitivně semidefinitní funkce.*

*Důkaz.* Tvrzení plyne z definice pozitivně semidefinitní funkce, neboť jsou-li funkce  $f$  a  $g$  pozitivně semidefinitní a  $h = f + g$ , platí pro každé  $n \in \mathbb{N}$ , komplexní konstanty  $c_1, \dots, c_n$  a body  $t_1, \dots, t_n \in T$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \bar{c}_k h(t_j, t_k) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \bar{c}_k [f(t_j, t_k) + g(t_j, t_k)] \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \bar{c}_k f(t_j, t_k) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \bar{c}_k g(t_j, t_k) \geq 0. \end{aligned}$$

□

**Věta 1.9.** *Součet dvou autokovariančních funkcí je autokovarianční funkce nějakého náhodného procesu s konečnými druhými momenty.*

*Důkaz.* Tvrzení je jednoduchým důsledkem vět 1.6, 1.7 a 1.8.

□

**Věta 1.10.** *Reálná část autokovarianční funkce je také autokovarianční funkcí. Imaginární část je autokovarianční funkcí jen tehdy, je-li identicky rovná nule.*

*Důkaz.* Bez újmy na obecnosti dokážeme jen pro centrované procesy. Je-li  $X_t = Y_t + iZ_t$  komplexní proces s nulovou střední hodnotou, pak  $EY_t = EZ_t = 0$  a  $R(s, t) = EX_s \bar{X}_t = E(Y_s + iZ_s)(Y_t - iZ_t) = EY_s Y_t + EZ_s Z_t + i(EZ_s Y_t - EY_s Z_t)$ . Reálná část je autokovarianční funkcí podle předchozí věty. Protože pro  $s = t$  je imaginární část nulová, platí i druhé tvrzení.

□

## 1.2 Některé důležité třídy náhodných procesů

Stacionární procesy tvoří velmi důležitou třídu náhodných procesů. V následujících kapitolách se budeme zabývat převážně slabě stacionárními procesy. V tomto odstavci se zmíníme ještě o dalších vlastnostech a třídách náhodných procesů.

### 1.2.1 Markovovy procesy

**Definice 1.11.** Řekneme, že proces  $\{X_t, t \geq 0\}$  je *Markovův proces* se stavovým prostorem  $(S, \mathcal{E})$ , jestliže pro libovolné  $t_0, t_1, \dots, t_n$ ,  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , platí

$$P(X_{t_n} \leq x | X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_0}) = P(X_{t_n} \leq x | X_{t_{n-1}}) \quad \text{s. j.} \quad (1.5)$$

pro každé  $x \in \mathbb{R}$ .

Vlastnost (1.5) se nazývá *markovská vlastnost*. Jednoduchými případy jsou Markovovy procesy s diskrétními stavy, neboli Markovovy řetězce s diskrétním a spojitým časem, které jsou popsány např. v Prášková a Lachout (2005) nebo v Prášková a Lachout (2012).

**Příklad 1.2.** Uvažujme Markovův řetězec  $\{X_t, t \geq 0\}$  s množinou stavů  $S = \{0, 1\}$  a spojitým časem, jehož počáteční rozdělení je  $P(X_0 = 0) = 1, P(X_0 = 1) = 0$ , a jehož matice intenzit je

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix},$$

$\alpha > 0, \beta > 0$ .

Zkoumejme stacionaritu tohoto procesu. Víme, že všechna konečněrozměrná rozdělení daného řetězce jsou dána počátečním rozdělením a soustavou matic pravděpodobností přechodu  $\mathbf{P}(t) = \{p_{ij}(t), i, j \in S\}$  pro všechna  $t \geq 0$  (Prášková a Lachout, 2012, odst. 3.1). Matice  $\mathbf{P}(t)$  jsou v tomto případě tvaru (viz Prášková a Lachout, 2012, příklad 3.4)

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta + \alpha e^{-(\alpha+\beta)t} & \alpha - \alpha e^{-(\alpha+\beta)t} \\ \beta - \beta e^{-(\alpha+\beta)t} & \alpha + \beta e^{-(\alpha+\beta)t} \end{pmatrix}.$$

Nyní máme vzhledem k počátečnímu rozdělení

$$P(X_t = 0) = p_{00}(t) = \frac{1}{\alpha + \beta}(\beta + \alpha e^{-(\alpha+\beta)t}),$$

což závisí na  $t$ , a podobně dostaneme  $P(X_t = 1) = p_{01}(t) = EX_t$ . Proces tedy není striktně, ani slabě stacionární.

Pokud ale počáteční rozdělání je stacionární rozdělání daného Markovova řetězce, potom  $\{X_t, t \geq 0\}$  je striktně stacionární proces (věta 3.12 v Prášková a Lachout, 2012) se střední hodnotou  $EX_t = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$  a autokovarianční funkcí

$$R(s,t) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} e^{-(\alpha+\beta)|s-t|}.$$

Je tedy i slabě stacionární.

## 1.2.2 Procesy s nezávislými přírůstky

**Definice 1.12.** Řekneme, že proces  $\{X_t, t \in T\}$ , kde  $T$  je interval, má *nezávislé přírůstky*, jestliže pro každé  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$  s vlastností  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  jsou náhodné veličiny  $X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  nezávislé. Jestliže pro každé  $s, t \in T, s < t$ , rozdělání přírůstků  $X_t - X_s$  závisí pouze na  $t - s$ , řekneme, že proces  $\{X_t, t \in T\}$  má *stacionární přírůstky*.

Procesem s nezávislými a stacionárními přírůstky je např. *Poissonův proces* s intenzitou  $\lambda$ , což je Markovův řetězec  $\{X_t, t \geq 0\}$  se spojitým časem takový, že  $X_0 = 0$  s. j. a pro  $t > 0$  mají náhodné veličiny  $X_t$  Poissonovo rozdělání s parametrem  $\lambda t$ . Přírůstky  $X_t - X_s$  pro  $s < t$  mají Poissonovo rozdělání s parametrem  $\lambda(t - s)$ . Podrobněji je Poissonův proces popsán např. v Prášková a Lachout (2012), odst. 3.4.

Jak můžeme snadno nahlédnout, rozdělání přírůstků  $X_t - X_s$  závisí skutečně jen na  $t - s$ . Poissonův proces ale není stacionární ani ve striktním, ani v slabém smyslu.

Jiný důležitý proces s nezávislými a stacionárními přírůstky je *Wienerův proces* (někdy též nazývaný proces *Brownova pohybu*). Je definován jako gaussovský náhodný proces  $\{W_t, t \geq 0\}$  s následujícími vlastnostmi:

1.  $W_0 = 0$  s. j. a  $\{W_t, t \geq 0\}$  má spojitě trajektorie.
2. Pro libovolné časové okamžiky  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$  jsou přírůstky  $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$  nezávislé náhodné veličiny.
3. Pro libovolné časové okamžiky  $0 \leq t < s$  mají přírůstky  $W_s - W_t$  normální rozdělání s nulovou střední hodnotou a rozptylem  $\sigma^2(s - t)$ , kde  $\sigma^2$  je kladná konstanta. Speciálně, pro každé  $t \geq 0$  je  $EW_t = 0$  a  $\text{var } W_t = \sigma^2 t$ .

Jak je vidět, ani Wienerův proces není stacionární ve smyslu definic z odstavce 1.1.1.