PETR KŮRKA
BEDŘICH VELICKÝ

HERMENEUTIKA A METAFORIKA ČÍSEL

OD POČTŮ KE KVANTOVÉ MECHANICE

KAROLINUM

Hermeneutika a metaforika čísel
Od počtů ke kvantové mechanice

Petr Kůrka
Bedřich Velický

Recenzovali:
prof. RNDr. Michal Křížek, DrSc.
prof. Ing. Edita Pelantová, Csc.

Vydala Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum
Ovocný trh 560/5, 116 36 Praha 1
www.karolinum.cz
Praha 2021
Jazyková korektura Jitka Hořejšová
Sazba Petr Kůrka
První vydání

Na obálce: Znázornění komplexní funkce sinus
v komplexní rovině

Ivanu M. Havlovi, který stvořil Centrum pro teoretická studia, jedinečné místo, kde jsme se mohli setkat k plodné nadoborové spolupráci.

ISBN 978-80-246-4819-4
ISBN 978-80-246-4833-0 (online : pdf)

Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz

Obsah

Předmluva

V matematice devatenáctého století probíhal proces aritmetizace analýzy, ve kterém se geometrické náhledy diferenciálního a integrálního počtu začaly zakládat analyticky na aritmetice reálných a komplexních čísel. Dedekindova[1] teorie řezů odvodila aritmetiku reálných čísel z aritmetiky přirozených a racionálních čísel a tím vyvstala otázka po založení čísel přirozených. Koncem devatenáctého století se jí zabývá Gottlob Frege (1848–1925) v *Základech aritmetiky* [33] a Edmund Husserl (1859–1938) ve *Filosofii aritmetiky* [45]. Ale tyto pokusy o založení aritmetiky nejsou úplně přesvědčivé. Frege [34] ve své recenzi *Filosofie aritmetiky* vytýká Husserlovi, že zkoumá pojem čísla psychologickým způsobem, ve kterém se smazává rozdíl mezi subjektivním a objektivním. V *Základech aritmetiky* definuje Frege přirozená čísla na základě pojmu stejněpočetnosti. Jak ale upozorňuje Dale Jacquette v předmluvě k anglickému překladu *Základů aritmetiky* [32], pojem stejněpočetnosti je založen na pojmu vzájemně jednoznačného přiřazení, který již pojem jednotky předpokládá. Ten je ukryt v termínu „jednoznačný“ a stejně tak v německém „beiderseits eindeutigen Zuordnung“ i v anglickém „one-to-one correspondence“. Není tu tedy bludný kruh, kdy to, co se definuje, se už předpokládá? Na problém se založením přirozených čísel poukazuje Michal Ajvaz ve stati *Číslo a jsoucno*:

> Pokusy o definici čísla ztroskotávají na tom, že se pokaždé ukáže, že definiens v sobě obsahuje prvky definienda. Je možné říci, co je číslo, a vyhnout se přitom definici v kruhu? Jistě to není možné v rámci matematiky, ale není to zřejmě možné ani prostřednictvím nějakého ústupu do „přiroze-

[1] Richard Dedekind (1831–1916)

> ného světa“ – i uspořádání přirozeného světa je proniknuto čísly a vztahy (Ajvaz [2, str. 261]).

Vysvětlení kruhem jsou v matematice a v logice považována za nepřípustná. Naproti tomu v humanitních vědách je na nich založena hermeneutická metoda výkladu. V klasické filologii se jedná zejména o výklad textů Písma nebo klasické řecké literatury. Martin Heidegger (1889–1976) hermeneutickou metodu rozšiřuje a zobecňuje na jakýkoliv výklad.

> Každý výklad, který má zjednat porozumění, musí již vykládanému rozumět. Tento fakt ani dříve neunikal pozornosti, i když jen v oblasti odvozených způsobů rozumění a výkladu, ve filologické interpretaci. ...
>
> Ale vidět v tomto kruhu něco bludného a ohlížet se po způsobech, jak se mu vyhnout, ba i jen „pociťovat“ jej jako nevyhnutelnou nedokonalost, znamená zásadně rozumění nerozumět (Heidegger [39, str. 180]).

K přirozeným číslům se dostáváme skrze počítání. Počítáme jablka v košíku nebo ovce ve stádě. To předpokládá, že počítané věci považujeme za **nedělitelné rozlišitelné jednotky** stejného druhu. Jejich nedělitelnost může být dána přirozeností jejich vymezení (jablko lze rozdělit, ale potom už to není jablko). Jejich rozlišitelnost může být dána jejich umístěním v prostoru.

Procesu počítání je blízce příbuzný proces měření – měření vzdálenosti, časového intervalu nebo vážení. Také zde potřebujeme jednotky, ty jsou však **dělitelné** a **arbitrárně stanovitelné**. Měřený údaj vyjadřujeme desetinným nebo racionálním číslem. Přirozená a (kladná) racionální čísla tak mají úzkou vazbu na náš pobyt ve světě.

Jinak je to s čísly zápornými, iracionálními, imaginárními a komplexními. Ta vznikají spíše z vnitřních potřeb matematiky, často proti vůli a odporu samotných matematiků. Již jejich názvy svědčí o výhradách a pochybnostech, které s nimi byly a jsou spojeny. Jejich ontologický status je nejasný, zpochybňuje se samotná jejich existence. Přesto i ona si nacházejí interpretaci a použití, pomáhají nám orientovat se v přirozeném světě a umožňují nám formulovat teorie, kterými si svět vykládáme. Nejmarkantnější je to u kvantové mechaniky, která s fenomenální přesností postihuje jevy mikrosvěta a která bez komplexních čísel není vůbec myslitelná.

To, že čísla záporná, iracionální a komplexní považujeme za čísla, je metafora. Ona se totiž jako čísla chovají. Můžeme je sčítat, násobit a někdy i umocňovat a srovnávat.

> Když vidím ptáka, který chodí jako kachna, plave jako kachna a káchá jako kachna, říkám tomu ptákovi kachna[2] (James Whitcomb Riley (1849–1916) [75]).

Metaforický přístup k novým skutečnostem a pojmům není nic výjimečného. Metafory prostupují celý náš život, nelze bez nich vůbec mluvit ani jednat. Metaforicky se utvářejí i pojmy, skrze které rozumíme světu. Tento náhled nabízejí Lakoff a Johnson [58], Lakoff a Núñez [59] i Zdeněk Neubauer (1942–2016), když komentuje dílo Paula Ricœura (1913–2005) [74].

> Ricœur ukazuje, že nejen básnické obrazy, nýbrž i všechny vědecké modely a teorie, ať se tváří jakkoliv objektivně a definitivně, jsou vlastně *velkými metaforami* – způsoby mluvy pomocí představ a pojmů vzatých z jiné, známé zkušenosti (srv. „planetární model atomu“ či „oblak elektronu“); všimněme si ostatně metaforičnosti i tak odborných termínů jako „hladina cukru v krvi“, „kolísání cen“ atp. To ovšem neznamená, že by tyto vědecké popisy světa nebyly pravdivé, že by to byly „pouhé metafory“: vždyť jde o faktické poznatky par excellence. Jejich metaforická povaha naopak ukazuje, že sama pravda spočívá v metafoře, že *bytí samo je metaforické* (Neubauer [68, str. 158]).

Otázkám založení čísel jsme se věnovali v semináři Fenomenologie matematiky, který probíhal v CTS[3] v letech 2017–2019. Zabývali jsme se založením čísel u Fregeho [33] a Husserla [45], zkoumali jsme roli, kterou hrají čísla v moderních fyzikálních teoriích. Jedním z plodů tohoto

[2] When I see a bird that walks like a duck and swims like a duck and quacks like a duck, I call that bird a duck.

[3] Centrum pro teoretická studia, společné pracoviště Univerzity Karlovy v Praze a Akademie věd České republiky.

semináře je předkládaná kniha, jejíž témata byla na semináři referována. Děkujeme všem účastníkům semináře, kteří do této diskuze přispěli, případně předběžné verze knihy pročítali a komentovali. Náš dík patří jmenovitě Michalu Ajvazovi, Ivanu M. Havlovi, Štěpánu Holubovi, Ivanu Chvatíkovi, Pavlu Koubovi, Pavlu Krtoušovi, Janu Makovskému, Alexandru Matouškovi a Kateřině Trlifajové.

Moderní pojem čísla je neoddělitelně spojen se vznikem a vývojem formálního matematického jazyka a matematizované fyziky. V předkládané knize tento vývoj sledujeme a vykládáme. Nepředpokládáme žádné speciální matematické znalosti, všechny pojmy motivujeme a vysvětlujeme. Přitom postupně uvádíme a používáme matematický symbolismus – od nejjednodušší algebraické symboliky k poměrně složitému jazyku predikátového počtu. Tomu se dost dobře nelze vyhnout. Jak píše Jacob Klein (1899–1978) ve své pronikavé studii *Řecké matematické myšlení a vznik algebry* [52], matematický formalismus je podstatou moderních fyzikálních teorií.

> Vytvoření formálního matematického jazyka mělo rozhodující význam pro konstituci moderní matematické fyziky. Pokud je matematická prezentace považovaná za pouhý nástroj, kterému je dávána přednost, protože náhledy přírodní vědy lze pomocí „symbolů" vyjádřit nejjednodušším a nejpřesnějším způsobem, pak se významu symbolismu nerozumí. Je sice pravda, že v sedmnáctém a osmnáctém století bylo stále ještě možné popsat a sdělit objevy o „přirozených" vztazích fyzikálních objektů bez matematických termínů. Přesto již tehdy – nebo spíše právě tehdy – to byla matematická forma, *mos geometricus*, na níž se zakládala spolehlivost a věrohodnost tohoto popisu. Po třech staletích intenzivního vývoje se ale již stalo nemožným obsah matematické fyziky oddělit od její formy. To, že jsou stále v módě elementární prezentace fyzikálních věd, které jsou do jisté míry nematematické, při svém odvozování základních pojmů se zdají být prosté všech předpokladů a spoléhají se spíše na přímou „intuici", by nás nemělo klamat zastíráním faktu, že je nemožné, a bylo vždy nemožné pochopit význam fyziky bez její matematické formy. Z toho pak pramení nepřekonatelné obtíže, do kterých se zaplétají

> diskuze moderních fyzikálních teorií, pokud se fyzikové či nefyzikové pokouší obejít bez matematického aparátu a prezentovat výsledky fyzikálního výzkumu v populární formě (Klein [52, str. 16]).

V tomto duchu jsme se neomezovali na postupné zavádění samotných čísel, ale zároveň jsme poukazovali na alespoň jejich elementární použití jak v matematice, tak i v „reálných“ situacích fyzikálního rázu. Využíváme proto i nezbytných základních prostředků infinitesimálních, které jsou rovněž všechny zavedeny v rámci textu. Ten je tak v principu soběstačný. Je samozřejmé, že předběžná obeznámenost s matematickým formalismem bude nápomocna plynulému sledování textu, není však podmínkou jeho uchopení. Doufáme, že naše pojetí si najde své čtenáře mezi záplavou knih popularizujích matematiku i fyziku bez použití jediného vzorce na jedné straně a literaturou vyhraněně odbornou na straně druhé. Oporou nám byla vzpomínka na mimořádně úspěšné serie knížek *Cesta k vědění*, vydávaných kdysi Jednotou českých matematiků a fysiků a později v trochu jiném formátu nakladatelstvím Academia. Přejeme čtenáři radost při postupném pronikání do celé problematiky pojmu čísla a požitek ze sledování jejího podrobného utváření a jednoduchých, ale poučných aplikací.

Praha, květen 2020

Petr Kůrka
Bedřich Velický

Kapitola 1

Přirozená čísla

Pokusme se o porozumění aritmetice přirozených čísel v hermeneutickém kruhu. Vodítkem nám přitom bude historie čísel pojednaná v knize Georgese Ifraha (1947–2019) *The Universal History of Numbers* [47] a Husserlova fenomenologie.

1.1 Základní čísla

Základní (kardinální) čísla **dvě**, **tři**, **čtyři** atd.[1] vyvstávají jako počty předmětů v přehlédnutelných ostře vymezených souborech. Obecný pojem předmětu vypracovává Edmund Husserl [46] v *Idejích k čisté fenomenologii a fenomenologické filosofii.* **Předmět** je jsoucno, věc či objekt, na který může být zaměřena naše pozornost (intence) a který si v čase podržuje svou identitu. Může to být fyzické jsoucno jako určitý strom nebo deštník, ale také určitá věta, určité město, jízdní řád nebo parlament.

Předměty kategorizujeme pomocí různě obecných **pojmů**, které vytvářejí stromovou strukturu. Například náš „Alík“ se zařazuje pod pojmy „pes – šelma – savec – obratlovec“. **Rozsah pojmu** je neostře vymezený soubor, který tvoří všechny předměty, které se pod daný pojem zařazují. Při zařazování předmětů pod pojmy srovnáváme daný předmět s typickými představiteli pojmů. Řídíme se přitom určitými rozlišovacími znaky, i když možná jen nevědomě. Pokud se ale chceme

[1] Ke statusu čísla **jedna** viz konec odstavce 1.2.

ujistit, že určitá houba není muchomůrka zelená, zkoumáme její rozlišovací znaky zvlášť pečlivě.

Pochopení světa, který nás obklopuje, skrze předměty a pojmy je kulturně podmíněné. Různé kultury rozvrhují předměty a vytvářejí pojmy různým, i když ne úplně libovolným způsobem. Jména barev v různých jazycích nejsou na sebe vždy přesně přeložitelná, barevné spektrum se v každém jazyce rozkládá specifickým způsobem. Přírodní národy mají podrobnější strukturu pojmů pro rostliny a živočichy, přímořské národy rozlišují podrobněji typy lodí a plachet. Pojmy se také vyvíjí a mění, například když se vyskytne nový, obtížně zařaditelný předmět nebo když se změní teorie, kterými svět popisujeme a vykládáme. Klasifikace druhů rostlin a živočichů se například mění, když se analyzuje jejich genom a zjišťují se dosud netušené příbuznosti nebo naopak odlišnosti.

Z předmětů vytváříme ostře vymezené soubory aktem koligace – shrnutím určitých předmětů do celku (Husserl [45]). Ostře vymezené soubory budeme nazývat **množiny**. Předměty množiny mohou být dány svými vlastnostmi nebo vztahy k jiným předmětům (např. jablka v košíku, knihy na mém stole nebo hesla určitého slovníku) nebo výčtem (např. nějaký pocit a nějaký anděl a Měsíc a Itálie – tento příklad uvádí Husserl [45] aby zdůraznil, že množiny mohou být tvořeny z libovolných, spolu nesouvisejících předmětů). Vymezení množiny však musí být ostré. Musí být jasné, co do množiny patří a co nikoliv, a její rozsah musí být ohraničený, tj. konečný. Množina předmětů je také předmětem, takže můžeme vytvářet **množiny množin** a to lze neomezeně iterovat.

Malá základní čísla jsou počty prvků množin, které dokážeme určit prostým přehlédnutím. Zdá se, že tato hranice je u čtyř (Ifrah [47, str. 6]). Dokážeme přímo rozlišit čtveřici od pětice, ale pětici od šestice už ne. Tato hranice se projevuje jazykově v češtině i v dalších jazycích. Řekneme dva, tři nebo čtyři předměty ale pět, šest nebo mnoho předmětů. Z počtů předmětů v přehlédnutelných množinách abstrahujeme základní čísla dvě, tři, čtyři. Abstrahujeme od toho, z jakých předmětů jsou množiny složeny, všímáme si jen toho, co mají různé tříprvkové množiny společného a čím se liší od dvouprvkových nebo čtyřprvkových množin. Na nesamozřejmost této abstrakce poukazuje Alfred North Whitehead (1861–1947):

> Číslo „pět“ používáme na určité skupiny různých entit – pět ryb, pět dětí, pět jablek, pět dní. Takže když uvažujeme o vztahu čísla „pět“ k číslu „tři“, uvažujeme o dvou skupinách věcí, jedné s pěti členy a jiné s třemi členy. Ale zcela abstrahujeme od úvah o povaze entit, které vytvářejí každou z těchto skupin. Přemýšlíme pouze o těch vztazích, které jsou naprosto nezávislé na podstatách prvků obou skupin. To je velmi pozoruhodný výkon abstrakce; a muselo trvat celé věky, než k této abstrakci lidstvo dospělo. Během dlouhých věků mohly být skupiny ryb navzájem srovnávány podle velikosti a rovněž tak skupiny dnů. Ale první člověk, který si všiml analogie mezi skupinou sedmi ryb a skupinou sedmi dnů, učinil pozoruhodný pokrok v historii myšlení. Byl to první člověk, který uvažoval o pojmu čisté matematiky (Whitehead [98, str.25]).

Přechod od počítání předmětů k pojmu čísla (arithmos) analyzuje Jacob Klein v kontextu Platónovy[2] filosofie. Rozlišuje počítání (counting, anzahlen – určování počtů) od výpočtů (calculation, rechnen – sčítání, odčítání, násobení).

> Než budeme pokračovat, musíme se pokusit porozumět tomu, jak lze dospět od přirozeného jevu počítání k pojmu „čistého“ počtu, který je v protikladu k počtu viditelnému nebo hmatatelnému. Budeme se přitom opírat o Platónovy náznaky. Každodenní praxe počítání a výpočtů nás postupně vede k oné důvěrné obeznámenosti s čísly a s jejich vztahy, kterou Platón nazývá aritmetické a logistické umění (techné) a která nám umožňuje počítání v konkrétních situacích. Zde se ovšem vynořuje otázka, čeho to jsou počty, které máme k dispozici dřív, než vůbec začneme počítat, a které jsou zřejmě nezávislé na konkrétních počítaných předmětech. Položit tuto otázku znamená nastolit problém „vědecké“ aritmetiky a logistiky. V tomto kontextu se již nezabýváme potřebami každodenního života, totiž počítáním pomíjivých předmětů, které může dávat proměnlivé výsledky. Spíše se

[2]Platón (427–347 před Kristem)

> snažíme porozumět vůbec možnosti počítání. Snažíme se porozumět tomu, že se zde jedná o vědění, a že zde proto musí být odpovídající jsoucno, jehož stálost a neproměnlivost teprve umožňuje, že může být poznáno. Ale jestliže se naše duše odvrátí od věcí běžného života, pak tato změna pohledu (periagogé) a obrat (metastrofé) vede k dalším otázkám po povaze těch předmětů aritmetiky a logistiky, které jsou poznatelné, protože jsou již známy předem. Hledají se zde předměty, které mají čistě poznatelnou povahu a které mají všechny charakteristiky počítatelného. Tyto požadavky jsou splněny čistými jednotkami, které nejsou smyslové, jsou přístupné porozumění, navzájem rozlišitelné a odolávají dělení. „Vědecká“ aritmetika a logistika pracuje s *počty čistých monád* (Klein [52, str. 63]).

Odrazem této filosofie jsou definice na začátku sedmé knihy Eukleidových[3] *Základů*:

1. *Jednotka* je to, podle čeho se každá ze jsoucích věcí nazývá jedno.
2. *Číslo* je počet složený z jednotek (Eukleidés [27, str. 187]).

To lze chápat tak, že **jednotka** je abstraktní předmět, nejobecnější něco, a základní čísla jsou počty prvků množin sestávajících z abstraktních, **rozlišitelných a nedělitelných** jednotek. Jednotky musí být identické v sobě a rozdílné od sebe navzájem. Nedělitelnost a rozlišitelnost abstraktních jednotek jsou předpoklady, které přijímáme, abychom mohli o číslech uvažovat. Tyto předpoklady odvozujeme ze způsobu, jakým množiny počítáme. Typicky se jedná o množiny fyzických věcí stejného druhu (ovce, jablka). Na jejich rozlišitelnosti se může podílet jejich umístění v prostoru, na jejich nedělitelnosti se může podílet přirozenost jejich vymezení (jablko sice lze rozdělit, ale potom už to není jablko).

Základní čísla dvě, tři, čtyři můžeme chápat jako pojmy. Rozsah pojmu „tři“ jsou všechny tříprvkové množiny. To koresponduje s Fregeovým přístupem v *Základech aritmetiky* [33], kde číslo je přímo definováno jako rozsah pojmu „stejněpočetný s určitým pojmem“. V Husserlově pojetí *Filosofie aritmetiky* [45] ale pojem „tři“ žádnou definici

[3] Eukleidés (3. století před Kristem)

nepotřebuje. Nazíráme ho stejným způsobem, jakým nazíráme pojem psa.

1.2 Řadová čísla

Kromě základních čísel máme také **čísla řadová (ordinální)**: první, druhý, třetí, čtvrtý atd. Ta vyjadřují pořadí událostí, které probíhají v čase, například pořadí jednotlivých úderů věžních hodin, pořadí dětí v rodině, pořadí úkonů při přípravě jídla či při výrobě artefaktu. Obecně chápeme **proces** jako sled rozlišitelných událostí a řadová čísla jako abstrakci z pořadí událostí v různých procesech. Zatímco základní čísla odkazují k prostoru (typicky se jedná o počítání fyzických předmětů rozmístěných v prostoru), řadová čísla odkazují k času – k našemu prožívání času, ve kterém se určité události vydělují. Abraham Seidenberg (1916–1988) [80] argumentuje, že řadová čísla vznikla v primitivních kulturách jako pořadí postav vyvolávaných při obřadech stvoření světa.

Také řadová čísla chápeme jako pojmy. Rozsah pojmu „třetí" jsou všechny třetí události ve všech procesech. Řadová čísla jsou uspořádána vztahy **předchůdce** a **následníka**. Jsou těmito vztahy jednoznačně určena. První je to jediné řadové číslo, které nemá žádného předchůdce, tj. není následníkem žádného řadového čísla. Druhé je to jediné řadové číslo, jehož předchůdce je první. Takto lze pokračovat k dalším řadovým číslům. Každé řadové číslo má následníka, který se liší od všech předcházejících. Řadová čísla pojmenováváme: první, druhý, třetí, čtvrtý atd. Díky pojmenování se s řadovými čísly dostaneme dál než s odpovídajícími čísly základními. Řadová čísla se také běžně reprezentují prsty, případně dalšími částmi těla. V archaických kulturách takovéto reprezentace sahaly až k několika desítkám (Ifrah [47, str. 12]).

Mezi čísly základními a řadovými je totiž vztah korespondence. Základnímu číslu dvě odpovídá řadové číslo druhý, základnímu číslu tři odpovídá řadové číslo třetí, atd. Poté co vyslechneme celé odbíjení věžních hodin, si uvědomíme, že odbily čtyři hodiny a můžeme si představit jednotlivé údery jako prvky množiny čtyř úderů. Naopak vnímáme-li čtveřici předmětů, můžeme je v mysli postupně procházet a přiřazovat jim pořadí: první, druhý, třetí a čtvrtý předmět. Nezáleží na tom, jakým způsobem čtveřici procházíme. Vždy skončíme na čtvrtém předmětu. Odloučíme-li totiž od dané čtveřice jeden její předmět, zbude nám trojice předmětů nezávisle na tom, který předmět jsme odloučili.

Tuto úvahu lze zobecnit na libovolně velké množiny. To otevírá cestu k počítání větších množin. Prvkům množiny postupně přiřazujeme řadová čísla a to, na kterém skončíme, určuje počet prvků množiny. Počítání prvků množin je reprodukovatelný proces. Počítáme-li stejnou množinu znovu a nedopustíme-li se chyby, dospějeme ke stejnému výsledku. Je-li množina předmětem směnného obchodu, záleží na tom, aby se obě strany na její velikosti shodly. Počet prvků množiny je její **intersubjektivní** a **objektivní** charakteristikou.

V korespondenci mezi základními a řadovými čísly vyvstává číslo **jedna**. Samotnou jednotku totiž Eukleidés [27] a ještě ani Husserl [45] za číslo nepovažují. Je-li číslo počet složený z jednotek, pak je to něco odlišného od jednotky samotné. Také o jednotlivé události, po které nenásleduje žádná další stejného druhu, nebudeme mluvit jako o procesu. Ale v procesu, který sestává z více událostí, má ta první význačnou pozici a řadová čísla jednotkou začínají. Má-li být korespondence mezi základními a řadovými čísly vzájemně jednoznačná, musí být základním číslem také samotná jednotka. Dodatečně lze nahlédnout, že množinu lze utvořit i z jediného předmětu. Přitom je jednoprvková množina něco jiného (je vhodné ji považovat za něco jiného) než ten předmět, který do ní náleží. Proto za základní číslo můžeme považovat i jednotku.

1.3 Stejněpočetnost

Počítání prvků množin je založeno na pojmu **vzájemně jednoznačného přiřazení**. Dvě množiny mají stejný počet prvků, pokud lze jejich prvky spárovat – vzájemně jednoznačně k sobě přiřadit. Konstrukce vzájemně jednoznačného přiřazení mezi dvěma množinami je děj, který probíhá v čase. Při počítání přiřazujeme prvkům množiny postupně řadová čísla. Sestrojujeme tedy vzájemně jednoznačné přiřazení mezi počítanou množinou a počátečním úsekem řadových čísel. Od řadových čísel se tak v hermeneutickém kruhu dostáváme zpět k základním číslům, která nyní chápeme nejen jako počty prvků přehlédnutelných množin, ale jako počty prvků množin, které dokážeme spočítat. Nedokážeme sice možná rozlišit sedmici od osmice přímo, dokážeme je však rozlišit, když je spočítáme. Také základní čísla pět, šest, sedm atd. tedy můžeme chápat jako pojmy.

Základní čísla lze srovnávat podle velikosti. Čtyři je menší než sedm, protože různým prvkům čtveřice lze přiřadit různé prvky sedmice a přitom některé prvky sedmice zbydou. Základní čísla lze **sčítat, násobit a umocňovat**. To jsou **aritmetické operace**. Operace sčítání je založena na sjednocování množin. Dvě množiny jsou **disjunktní**, pokud nemají žádný společný prvek. Dvě nebo více disjunktních množin můžeme sjednotit do jediné množiny. Počet jejích prvků je součet počtů sjednocovaných množin. Máme-li množinu několika stejně početných množin, je celkový počet předmětů v jejich sjednocení dán násobením, které je opakovaným přičítáním. Další aritmetickou operací je umocňování, které je opakovaným násobením.

1.4 Jména čísel

Při konstituci základních i řadových čísel je třeba nově ustavovaná čísla pojmenovávat. Dělá-li se to systematicky, vzniká **číselná soustava**. V archaických kulturách se používaly **aditivní číselné soustavy**, které mají **jednotky vyšších řádů** jako dvojky, trojky či pětky a využívají sčítání. Podle Seidenberga [80] převládala u nejstarších kultur aditivní soustava dvojková. Například v kultuře Bakiri v Jižní Americe měla čísla jména:

(1) tokale,
(2) ahage,
(3) ahage tokale,
(4) ahage ahage,
(5) ahage ahage tokale,
(6) ahage ahage ahage.

V pozdějších kulturách se objevují soustavy pětkové, desítkové i dvacítkové a čísla se vyjadřují opakováním těchto jednotek vyšších řádů (viz Ifrah [47, str. 23]). Kromě toho se objevuje symbolická reprezentace čísel. V nejjednodušší podobě je symbolem jednotky čárka (vryp) a symbolem základního čísla je řada vrypů: $|, ||, |||, ||||, \ldots$

Se vznikem písma vznikají také **znaky** pro čísla. Znaky jsou ikonické. Jsou to obrázky, které se mohou navzájem lišit, ale dokážeme je identifikovat jako tentýž znak. Podstatné je, že v určitých situacích používáme určitou sadu znaků, kterou nazýváme **abeceda**. Řetězce znaků nazýváme **slova**. Znaky dokážeme od sebe rozlišovat a rozpoznávat jejich identitu – umíme číst. Symbolické reprezentace čísel jsou již psané podoby jejich jmen. Zavádí se pro ně však také speciální znaky. Ve starověkém Egyptě se používaly zvláštní znaky pro jednotky, desítky, stovky a tisíce. V jónské číselné soustavě antického Řecka se číslice $1, 2, 3, \ldots$ značily písmeny $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, desítky $10, 20, 30, \ldots$ se značily písmeny $\iota, \kappa, \lambda, \ldots$ a stovky písmeny $\rho, \sigma, \tau, \ldots$ Například 321 se zapisovalo jako $\tau\kappa\alpha$. V tomto kontextu se znovu objevuje potřeba považovat za číslo i jednotku. Potřebujeme pro ni znak, se kterým zacházíme stejným způsobem jako se znaky pro ostatní čísla, takže je o důvod méně považovat ji za entitu odlišného druhu.

Máme-li znaky pro čísla, můžeme vyjádřit znakově i vztahy mezi nimi jako $2 < 5$ nebo aritmetické operace $2 + 3 = 5$ nebo $2 \cdot 3 = 6$. Tak se tato oblast znaků odpoutává a osamostatňuje od oblasti pojmů, ze které je odvozena. Vztahy, které platí mezi čísly dvě, tři, čtyři a pět, se vyjadřují řetězci znaků a s nimi můžeme zacházet formálním způsobem, aniž bychom se nutně vztahovali k jejich významu.

V aditivních číselných soustavách je vždy jen konečný počet znaků pro jednotky vyšších řádů, a tedy jen omezený rozsah čísel, která lze označovat. V **pozičních číselných soustavách** jsou jednotky vyšších řádů mocniny základu, neznačí se ale zvláštními symboly. Význam číslic je dán jejich pozicí v zápisu čísla. To znamená, že s konečnou sadou číslic lze označovat libovolně velká čísla. První poziční (desítko–šedesátková) číselná soustava vznikla ve staré Babylonii v třetím tisíciletí před Kristem. Číslice od jedné do padesáti devíti se zapisovaly opakováním znaků pro jednotku a desítku, větší čísla se vyjadřovala v poziční soustavě se základem šedesát (viz Adhikari [1] nebo Høyrup [42]).

V naší desítkové soustavě jsou jednotky vyšších řádů mocniny deseti: desítky, stovky, tisícovky atd. Čísla se zapisují jako řetězce číslic, například $235 = 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5$. Desítková poziční soustava vznikla v Indii v šestém století (viz Ifrah [47, str. 399]). Islámské civilizaci ji zprostředkoval Al Chvárizmí (asi 783–850) ve svém *Aritmetickém traktátu* [3]. Do Evropy ji přinesl v desátém století Gerbert z Aurillacu, ale začala se šířit teprve ve třináctém století, kdy ji popsal Leonardo Fibonacci Pisánský (asi 1170–1250) ve své knize *Liber abaci*.

Poziční číselná soustava si vynutí zavedení číslice **nula**, která vyjadřuje nepřítomnost jednotek některých řádů: $203 = 2 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 3$. Ve starobabylonské šedesátkové soustavě se nula nepoužívala a nepřítomnost některých řádů se v zápise vyjadřovala mezerou. To však vedlo k nejednoznačnostem. V Babylonii se nula značící nepřítomnost některých řádů začala používat v helénské době v třetím století před Kristem (viz Høyrup [43, str. 293]). V Indii je její užívání dosvědčeno v šestém století (viz Ifrah [47, str. 399]).

Nulu můžeme chápat jako pouze formální znak zastupující prázdné místo. Také se však můžeme nechat vést tímto formalismem a metaforicky nulu za číslo uznat. K metafoře musíme sáhnout, kdykoliv se setkáme s novou skutečností, pro kterou nemáme slov. Jevem metafory se podrobně zabývá Paul Ricœur [74].

> ... Ricœur ukazuje, že v případě metafory nejde o zvláštní jev básnického či rétorického způsobu mluvy, nýbrž že veškerý jazyk je svou povahou metaforický. Neexistuje striktní rozdíl mezi základním významem slov a jejich významem přeneseným; to, co považujeme za základní významy, jsou pouze metafory mrtvé, vžité, lexikalizované[4] (Neubauer [68, str. 150]).

Považovat nulu za číslo se přirozeně nabízí, když v poziční soustavě čísla sčítáme a násobíme. Poziční soustava nám totiž dovoluje sčítat a násobit **zápisy čísel** mechanicky, aniž bychom je nutně interpretovali jako počty prvků množin. Zápisy čísel sčítáme zprava doleva od nejnižšího k nejvyššímu řádu s přenosem k vyšším řádům, pokud součet číslic přesáhne devítku. K tomu potřebujeme znát jen součty číslic 1 až 9. Podobně pro násobení potřebujeme pouze malou násobilku. Tyto mechanické procedury se nazývají **algoritmy**. Sčítání a násobení jsou **algoritmické operace** a jsou **korektní**. To znamená, že algoritmické operace se zápisy čísel odpovídají aritmetickým operacím s čísly. Korektnost aritmetických algoritmů sčítání a násobení vyplývá z komutativního, asociativního a distributivního zákona (viz odstavec 1.5).

[4]Všimněme si třeba, kolik metafor je vlastně v právě uvedené větě: „základní“, „přenesený“, „mrtvý“... Dokonce i sám pojem metafory (tj. přenosu META–FEREIN) je nutno chápat metaforicky – význam není balík.

Při obou aritmetických algoritmech potřebujeme aritmetické operace pro nulu: přičtením nuly se žádné číslo nezmění, vynásobení nulou dává nulu. Dodatečně lze nulu interpretovat jako základní číslo. Je to počet prvků prázdné množiny, která žádné prvky nemá. Na otázku, kolik koláčků zbylo na talíři, lze odpovědět, že žádný, tedy nula. Od konstituce základních čísel dvě, tři, čtyři tak dospíváme nejen ke konstituci větších čísel pět, šest, sedm atd., ale i ke konstituci menších čísel jedna, nula. Že je považujeme za čísla, můžeme chápat jako metafory.[5] K tomu přispívá i to, že s nimi lze jako s čísly zacházet: můžeme je s jinými čísly sčítat, násobit i srovnávat. Trváme-li na vzájemně jednoznačné korespondenci mezi základními a řadovými čísly, stane se nula paradoxně prvním řadovým číslem. Rozšíření základních a řadových čísel o nulu je plodná volba, která strukturu čísel zjednodušuje a nechává vyvstat nové souvislosti.

1.5 Algebraická symbolika

Obecné vztahy mezi čísly se vyjadřují algebraickou symbolikou. Například při operaci sčítání, která odpovídá sjednocování množin, nezáleží na tom, zda se nejprve zaměříme na první množinu a potom ji sloučíme s druhou množinou, nebo to uděláme naopak. Tato úvaha nezávisí na konkrétních velikostech sjednocovaných množin. Platí obecně pro libovolně velké množiny. To vyjadřujeme algebraicky **komutativním zákonem**

$$n + m = m + n.$$

Písmena n, m zde jsou proměnné, které zastupují libovolná čísla. Podobně dospějeme k **asociativnímu zákonu**

$$(n + m) + p = n + (m + p),$$

[5] Tento postup je pro matematiku typický. Například topologický pojem dimenze se odvíjí od náhledu, že hranice třírozměrného tělesa je plocha, tedy dvourozměrný útvar. Tento náhled se zobecňuje nejen k vyšším dimenzím ale i k nižším: přímka nebo kružnice jsou jednorozměrné (mají dimenzi jedna), konečné bodové množiny mají dimenzi nula, a dokonce prázdná množina má dimenzi -1. To není svévole, ale postup, který vede k formálně nejjednodušší definici a zpětně (v hermeneutickém kruhu) pojem dimenze osvětluje.

který říká, že součet tří čísel nezávisí na pořadí jejich sčítání. Součet součtu prvních dvou čísel s třetím je stejný jako součet prvního se součtem druhého a třetího. Komutativní a asociativní zákon jsou **aritmetické identity**. Používáme je, i když si je nemusíme explicitně uvědomovat a i kdybychom je nedokázali vyjádřit algebraickou symbolikou. Vyjadřují náhled, že tyto identity budou platit pro jakákoliv čísla, se kterými se můžeme setkat. Jsou na nich založeny jak aditivní, tak poziční číselné soustavy.

S algebraickými identitami můžeme zacházet formálním způsobem a odvozovat další identity, které už z názoru být zřejmé nemusí. Při těchto odvozeních používáme **reflexivitu, symetrii a transitivitu** rovnosti:

$n = n$ (reflexivita).
Jestliže $n = m$, pak $m = n$ (symetrie).
Jestliže $n = m$ a $m = p$, pak $n = p$ (transitivita).
Jestliže $n = m$, pak $n + p = m + p$ a $p + n = p + m$.

Uplatňují se zde obecné principy z první knihy Eukleidových *Základů*:

1. Co se rovná témuž, rovná se i navzájem.
2. A jestliže se ke stejně velkým věcem přidají stejně velké věci, pak se celky rovnají.
3. A jestliže se od stejně velkých věcí odeberou stejně velké věci, pak se zbytky rovnají (Eukleidés [27, str. 117]).

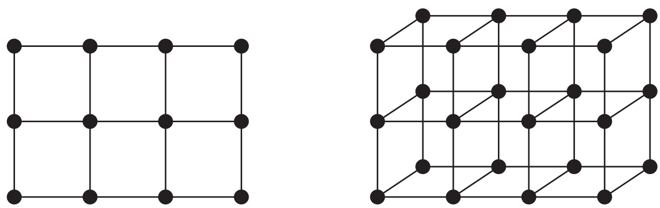
To znamená, že k oběma stranám algebraické identity můžeme přičíst či od nich odečíst stejné číslo či stejný algebraický výraz a dostaneme opět platnou algebraickou identitu.

Máme-li množinu několika stejněpočetných množin, je celkový počet předmětů v jejich spojení dán násobením, které je opakovaným přičítáním

$$n \cdot m = \overbrace{m + m + \cdots + m}^{n\text{-krát}}.$$

Z komutativního a asociativního zákona pro sčítání plynou formálním způsobem oba **distributivní zákony**

$$
\begin{aligned}
(n+p)\cdot m &= \overbrace{m+\cdots+m}^{n\text{-krát}}+\overbrace{m+\cdots+m}^{p\text{-krát}}\\
&= n\cdot m + p\cdot m,\\
n\cdot(m+p) &= \overbrace{(m+p)+\cdots+(m+p)}^{n\text{-krát}}\\
&= \overbrace{m+\cdots+m}^{n\text{-krát}}+\overbrace{p+\cdots+p}^{n\text{-krát}}\\
&= n\cdot m + n\cdot p.
\end{aligned}
$$



Obrázek 1.1: Komutativní a asociativní zákon pro násobení: $3\cdot 4 = 4\cdot 3$, $(2\cdot 3)\cdot 4 = 2\cdot(3\cdot 4)$.

Také pro násobení platí komutativní i asociativní zákon

$$
\begin{aligned}
n\cdot m &= m\cdot n,\\
n\cdot(m\cdot p) &= (n\cdot m)\cdot p.
\end{aligned}
$$

Jejich platnost lze nahlédnout geometricky, když předměty daných množin reprezentujeme body a uspořádáme je v rovině nebo v prostoru do obdélníku nebo kvádru (obr. 1.1). Taková uspořádání si dovedeme představit obecně, nezávisle na konkrétních velikostech čísel n, m a p. Alternativně lze komutativní zákon pro násobení nahlédnout kombinatoricky. Trojici čtveřic lze přeuspořádat na čtveřici trojic:

$$
\begin{aligned}
3\cdot 4 &: \{\{a_1,a_2,a_3,a_4\},\{b_1,b_2,b_3,b_4\},\{c_1,c_2,c_3,c_4\}\},\\
4\cdot 3 &: \{\{a_1,b_1,c_1\},\{a_2,b_2,c_2\},\{a_3,b_3,c_3\},\{a_4,b_4,c_4\}\}.
\end{aligned}
$$

Podobně lze kombinatoricky nahlédnout i asociativní zákon pro násobení. Další aritmetickou operací je umocňování, které je opakovaným násobením

$$n^m = \overbrace{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}^{m-\text{krát}}.$$

Z komutativního a asociativního zákona pro násobení plynou identity

$$\begin{aligned}
(n \cdot p)^m &= \overbrace{(n \cdot p) \cdots (n \cdot p)}^{m\text{-krát}} = \overbrace{n \cdots n}^{m\text{-krát}} \cdot \overbrace{p \cdots p}^{m\text{-krát}} = n^m \cdot p^m, \\
n^{m+p} &= \overbrace{n \cdots n}^{m\text{-krát}} \cdot \overbrace{n \cdots n}^{p\text{-krát}} = n^m \cdot n^p, \\
(n^m)^p &= \overbrace{n^m \cdot \cdots \cdot n^m}^{p\text{-krát}} = \overbrace{n \cdots n}^{(m \cdot p)\text{-krát}} = n^{m \cdot p}.
\end{aligned}$$

Umocňování čísel má význam v kombinatorice například při počítání slov abeced. **Abecedou** zde rozumíme jakoukoliv konečnou množinu znaků. Řetězce znaků této abecedy nazýváme **slova**. Počet všech možných slov délky k sestavených z n-prvkové abecedy je n^k. Například pro **dvojkovou abecedu** $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ existuje $2^3 = 8$ slov délky 3:

$$\mathbf{2}^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}.$$

Pro umocňování komutativní ani asociativní zákon neplatí. n^m je obecně různé od m^n a $n^{(m^p)}$ je obecně různé od $(n^m)^p$.

Aritmetické operace nás přivádějí k testu vhodnosti a životnosti metafory jednotky a nuly jako čísel. Jsou-li to čísla, mělo by být možné je sčítat, násobit a umocňovat. A pro tyto operace by měla platit stejná pravidla jako pro ostatní čísla. U sčítání a násobení tomu tak vskutku je:

$$n + 0 = n,\ n \cdot 0 = 0,\ n \cdot 1 = n.$$

Pro mocninu dostáváme z definice $0^m = 0$ pro $m > 0$. Jak definovat n^0? Je-li $n > 0$ a má-li platit $n^m = n^{m+0} = n^m \cdot n^0$, musí být $n^0 = 1$ protože $n^m \neq 0$. Pro definici mocniny 0^0 se ale žádné vodítko nenabízí. Pravidla $0^m = 0$ a $n^0 = 1$ nelze harmonizovat a výraz 0^0 je lépe nechat nedefinovaný. Říkáme, že 0^0 je **neurčitý výraz**. Vidíme na tom, že nulu sice lze považovat za číslo, ale je to číslo s výjimečnými vlastnostmi.

1.6 Přirozená čísla

Vztahy mezi základními a řadovými čísly vedou ke konstituci přirozených čísel, které chápeme jako předměty formálně matematické. Jsou to „myšlenkové objekty“, které jsou nositeli určitých vztahů, a tím vytvářejí **strukturu**. Abstrahujeme od toho, čím tyto objekty jsou, jaká je případně jejich vnitřní struktura či složení, soustředíme se pouze na vztahy mezi nimi.

Přirozená čísla jsou konstituována vztahy odpozorovanými na základních a řadových číslech a na korespondenci mezi nimi. Při konstituci přirozených čísel se v hermeneutickém kruhu vracíme na vyšší úrovni k řadovým číslům (doplněným o nulu). Řadu přirozených čísel nula, jedna, dvě, tři, čtyři atd. zakládáme na vztahu **předchůdce a následníka**. Nula je to jediné přirozené číslo, které nemá předchůdce. Jedna je to jediné přirozené číslo, které následuje po nule a je od nuly různé. To zapisujeme $1 = S(0)$, kde S značí operaci následníka (successor). Podobně dvě je to jediné číslo, které následuje po jednotce, tj. $2 = S(1)$, atd. Každé přirozené číslo je jednoznačně určeno vztahem ke svým předchůdcům a konstituuje se teprve po svých předchůdcích. Každé přirozené číslo má následníka, který se liší od všech předcházejících dosud utvořených čísel.

Konstituce přirozených čísel tedy probíhá v čase a tento proces je **potenciálně nekonečný**. Každé jeho ukončení by bylo svévolné a arbitrární. Představíme-li si ale tento proces jako celek, dospíváme k **aktuálnímu nekonečnu** všech přirozených čísel. Ta tvoří ostře vymezený, ale nekonečný soubor

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Chápeme-li ho metaforicky jako množinu, otvírá se cesta k teorii (nekonečných) množin. Vede nás to k dalším význačným nekonečným množinám, jako je množina sudých čísel nebo množina lichých čísel. U nekonečných množin očekáváme stejné nebo podobné vlastnosti jako u množin konečných. Toto očekávání se splní jen v omezené míře. Eukleidův axiom

> A celek je větší než část (Eukleidés [27, str. 117])

pro nekonečné množiny neplatí. Přirozená čísla lze vzájemně jednoznačně spárovat se sudými čísly předpisem $n \mapsto 2 \cdot n$, přestože sudá čísla tvoří jen část všech čísel přirozených. Přesto se ale podařilo smysluplnou teorii nekonečných množin vybudovat (viz kapitola 11).

Krok od jednotlivých přirozených čísel k nekonečné množině všech přirozených čísel je, jak argumentuje Petr Vopěnka (1935–2015) [95], nesamozřejmý, kontroverzní a paradoxní. Je ale nesmírně plodný. Teologickými argumenty ho obhajuje Bernard Bolzano (1781–1848) v knize *Paradoxy nekonečna* [14]. Přirozená čísla tvoří nejen množinu, ale také **strukturu** s různými vztahy mezi svými prvky. Jsou to aritmetické operace následníka, sčítání, násobení a umocňování a vztahy nerovnosti. **Struktura přirozených čísel** $\mathbb{N}$ s operací následníka S je jednoznačně popsána následující induktivní definicí:

Definice 1.1
1. *Nula je přirozené číslo.*
2. *Každé přirozené číslo má jediného následníka, který se liší od všech dosud utvořených přirozených čísel.*
3. *Jiná přirozená čísla než ta, která lze utvořit pomocí pravidel 1 a 2, neexistují.*

Nula je jediné přirozené číslo, které nemá předchůdce. Jednotka je to jediné číslo jehož předchůdce je nula, atd. Dvě různá přirozená čísla mají různé následníky.

Abychom o číslech mohli mluvit, dáváme jim jména v přirozeném jazyce a také jména znaková. Přirozená čísla mají mnoho různých jmen v mnoha různých přirozených jazycích i v mnoha různých číselných soustavách. V desítkové poziční soustavě má každé přirozené číslo jednoznačně určené jméno – jeho **zápis**. To je slovo abecedy $\{0, 1, \ldots, 9\}$, které buď nezačíná nulou, nebo je tvořeno pouze nulou. Zápis čísla ale není číslo, je to jeho jméno.

Od základních čísel přejímají přirozená čísla strukturu sčítání a násobení. Jména čísel jsou proto také **aritmetické výrazy**, které jsou ze zápisů čísel utvořeny pomocí znaků $S, +, \cdot$ pro aritmetické operace následníka (successor), sčítání a násobení. Podobně jako přirozená čísla, i aritmetické výrazy definujeme induktivně:

Definice 1.2
1. *Každý zápis čísla je aritmetický výraz.*
2. *Je-li t aritmetický výraz, je $S(t)$ aritmetický výraz.*
3. *Jsou-li t, s aritmetické výrazy, jsou $(t+s)$ a $(t \cdot s)$ aritmetické výrazy.*

Různé aritmetické výrazy mohou označovat stejné číslo. To značíme rovností $t = s$, například $2 + 3 = 5$. Pro operaci následníka máme nekonečnou řadu rovností

$$S(0) = 1,\ S(1) = 2,\ S(2) = 3, \ldots$$ [6]

Pro sčítání a násobení máme rovnosti

$$\begin{aligned} t + 0 &= t, \\ t + S(s) &= S(t + s), \\ t \cdot 0 &= 0, \\ t \cdot S(s) &= (t \cdot s) + t, \end{aligned}$$

kde t a s jsou libovolné aritmetické výrazy. Z těchto rovností plynou formálním způsobem (pomocí symetrie a tranzitivity rovnosti) všechny další rovnosti mezi aritmetickými výrazy. Definice sčítání zápisů čísel odpovídá sjednocování množin (viz odstavec 1.5). Rovnost

$$t + S(s) = S(t + s)$$

je totiž založena na asociativním zákonu a podobně pro další aritmetické operace. Z uvedených pravidel lze odvodit všechny identity tvaru $t + s = v$, $t \cdot s = v$, kde t, s, v jsou zápisy čísel. Například

$$\begin{aligned} 1 + 2 &= 1 + S(1) = S(1 + 1) = S(1 + S(0)) = S(S(1 + 0)) \\ &= S(S(1)) = S(2) = 3, \\ 3 \cdot 2 &= 3 \cdot S(1) = 3 \cdot 1 + 3 = 3 \cdot S(0) + 3 = (3 \cdot 0 + 3) + 3 \\ &= (0 + 3) + 3 = 3 + 3 = 6. \end{aligned}$$

1.7 Princip úplné indukce

Z induktivní definice 1.1 přirozených čísel v odstavci 1.6 plyne

Definice 1.3 (Princip úplné indukce) *Platí-li nějaké tvrzení pro nulu, a plyne-li z jeho platnosti pro přirozené číslo n jeho platnost pro $S(n)$, pak toto tvrzení platí pro všechna přirozená čísla.*

[6] Tyto rovnosti jsou dány algoritmem přičítání jednotky v desítkové soustavě.

Z principu úplné indukce plyne mnoho obecných tvrzení o přirozených číslech. Například pro každé číslo n platí $1 + n = n + 1$. To jsme nahlédli jako evidentní vztah, protože sčítání základních (a tedy i přirozených) čísel odpovídá slučování disjunktních množin. Lze dokonce argumentovat, že v představě slučování množin není pořadí slučovaných množin vůbec obsaženo, takže rozdíl mezi $1 + n$ a $n + 1$ je pouze typografický: artefakt vzniklý při symbolickém vyjádření. Ale zakládáme-li přirozená čísla induktivní definicí, je důkaz žádoucí také jako potvrzení, že naše formalizace je korektní:
Pro $n = 0$ tvrzení plyne z identit

$$1 + 0 = 1 = S(0) = S(0 + 0) = 0 + S(0) = 0 + 1.$$

Platí-li $1 + n = n + 1$, plyne z toho, že platí i $1 + S(n) = S(n) + 1$:

$$\begin{aligned} 1 + S(n) &= S(1 + n) = S(n + 1) = S(n + S(0)) = S(S(n + 0)) \\ &= S(S(n)) = S(S(n) + 0) = S(n) + S(0) = S(n) + 1. \end{aligned}$$

Úplnou indukcí lze také dokázat, že sčítání a násobení jsou komutativní, asociativní a distributivní:

$$\begin{aligned} n + m &= m + n, \\ (n + m) + p &= n + (m + p), \\ n \cdot m &= m \cdot n, \\ (n \cdot m) \cdot p &= n \cdot (m \cdot p), \\ n \cdot (m + p) &= n \cdot m + n \cdot p. \end{aligned}$$

Tak se v hermeneutickém kruhu vracíme k rovnostem, které jsme založili na náhledu.

Dále lze také úplnou indukcí ukázat, že z rovnosti $n + p = m + p$ plyne rovnost $n = m$ a pokud $p \neq 0$, pak z rovnosti $n \cdot p = m \cdot p$ plyne rovnost $n = m$ (viz například Sochor [85]). Struktura přirozených čísel se tak obohacuje o další vztahy **uspořádání** a **dělitelnosti** a o další operace **odčítání** a **dělení**. Ty jsou jen částečné, nejsou definovány pro všechny dvojice čísel. Říkáme, že přirozené číslo n je menší nebo rovno přirozenému číslu m, pokud $n + p = m$ pro nějaké přirozené číslo p. To zapisujeme formulí

$$n \leq m \Leftrightarrow (\exists p)(p + n = m).$$